2013

LANGKAH AWAL MENUJU OSN MELALUI PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

O S N

Oleh: Didik Sadianto, S.Pd.

LANGKAH AWAL MENUJU OSN

MELALUI PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

PEMBINAAN KHUSUS OLIMPIADE SAINS NASIONAL MATEMATIKA

(CALON PESERTA SELEKSI OSN 2014)

DISUSUN OLEH

DIDIK SADIANTO, S.Pd.

SMA DARUL ULUM 2 UNGGULAN BPPT CIS ID 113 JOMBANG

PONDOK PESANTREN DARUL ULUM, PETERONGAN, JOMBANG, JAWA TIMUR

Telp. 0321-865265, Website:http://www.smulandu2-jbg.sch.id

Tahun 2013

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Penulis ucapkan kepada Allah, SWT karena dengan karunia-Nya Penulis dapat menyelesaikan penulisan buku ini. Buku ini Penulis tulis dalam rangka mempermudah tugas dalam mempersiapkan siswa-siswa SMA Darul Ulum 2 Unggulan BPPT CIS ID 113 Jombang menghadapi olimpiade matematika pada tahap-tahap awal, yakni OSK dan OSP 2014. Buku ini merupakan hasil revisi 02 dari buku edisi 2012.

Penulis menyarankan sebagai bahan penunjang untuk materi dalam buku ini, Pembina Olimpiade di sekolah dapat menyampaikan materi tentang pembuktian langsung maupun tidak langsung serta Strategi Penyelesaian Masalah (Problem Solving Strategies) yang dapat dipelajari dari beberapa buku yang ada seperti Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika karya Wono Setya Budhi, Problem-Solving Strategies karya Arthur Engel maupun Problem-Solving Through Problems karya Loren C. Larson dan mengujungi blog Pak Eddy Hermanto yang berisi Soal & Solusi OSN Matematika Mulai Tahun 2002 (www.baktiolimpiade.wordpress.com).

Ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian buku ini, khususnya kepada isteri tercinta Penulis, Rahayu Lestari, S.Pd., yang telah memberi dukungan yang besar kepada Penulis serta juga telah melahirkan puteri pertama kami, Qonitah Ayu Nabilah Nuruljannah pada 23 Nopember 2010.

Penulis juga berharap semoga, buku ini dapat menjadi salah satu panduan belajar TIM OSN 2013 SMA Darul Ulum 2 Unggulan BPPT CIS ID 113 Jombang (Moch. Rizqi Aulia Bisri, Laily Dwi Retno W., Lutfia Zein Amalia, Chasib Idris, Hisyam Wijaya, Dewi Wulandari, Fatma Syifa Izzul Fahma, Fitriatuz Zakia, Alya Dhiya Syarifa, Ferry Abu D Al ghifari, Durrah Izza Zharfani, Fatiya Rahmita E, Zulfa Rusduana MN) dan juga memberi manfaat kepada semua TIM ini. Pada akhirnya bisa mewakili Sekolah, Pondok Pesantren Darul Ulum, Kab. Jombang, Propinsi JATIM di level OSN Matematika Tahun 2014. Amin…Amin.

Penulis merasa bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Untuk itu Penulis mengharapkan saran dan kritik dari Pembaca yang budiman sebagai bahan perbaikan buku ini.

Akhir kata semoga buku ini dapat bermanfaat yang sebesar-besarnya bagi Pembaca sekalian.

Jombang, 31 Oktober 2013

DIDIK SADIANTO, S.Pd.
(didiksadianto.UTS2MAT@gmail.com)
(http://www.osn-matematika.blogspot.com)

DAFTAR ISI

Cover		....	i
Kata Pengantar		....	ii
Daftar Isi		....	iii
BAB I ALJABAR			
1	Sistem Bilangan Real	....	12
2	Ketaksamaan	....	15
3	Nilai Mutlak	....	24
4	Polinomial/Suku Banyak	....	31
5	Fungsi	....	38
6	Persamaan & Sistem Persamaan	....	50
7	Barisan & Deret	....	72
BAB II GEOMETRI			
1	Trigonometri	....	81
2	Garis	....	89
3	Segitiga	....	92
4	Segiempat	....	110
5	Segi-n Beraturan	....	116
6	Lingkaran	....	116
7	Mass point	....	122
BAB III TEORI BILANGAN			
1	Sistem Bilangan Bulat	....	127
2	Keterbagian	....	127
3	Bilangan Prima & Teorema Dasar Aritmatika	....	134
4	FPB & KPK	....	138
5	Bilangan Kuadrat Sempurna & Kubik Sempurna	....	142
6	Modulo	....	145
7	Persamaan Bilangan Bulat	....	153
8	Fungsi Tangga	....	158
BAB IV KOMBINATORIKA			
1	Prinsip Pencacahan & Binomial Newton	....	163
2	Peluang Suatu Kejadian	....	182
3	Prinsip Sangkar Merpati/PHP	....	191
4	Prinsip Inklusi-Eksklusi	....	195
5	Prinsip Paritas	....	198
6	Fungsi Pembangkit	....	200

DAFTAR RUJUKAN

BAB I
ALJABAR

1. Sistem Bilangan Real

Andaikan $\mathrm{N}, \mathrm{Z}, Q, \Re$ berturut-turut menyatakan himpunan bilangan asli, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, dan himpunan bilangan real. Masing-masing himpunan ini dilengkapi dengan operasi tambah dan operasi kali disebut sistem bilangan. Sistem ini biasa ditulis notasi himpunan beserta operasinya. Sebagai contoh sistem bilangan asli ditulis (N,+,×) dan sistem bilangan real ditulis ($\Re$, +, x). Yang biasanya cukup ditulis notasi himpunannya saja, yaitu N atau $\Re$ saja.

Berikut akan dibahas dua aksioma yang berkaitan dengan sistem bilangan real, yaitu aksioma lapangan dan aksioma urutan.

1.1. Aksioma Lapangan

a. Aksioma Penjumlahan

1. Sifat Ketertutupan

   Jika a dan b adalah bilangan real, maka ada satu dan hanya satu bilangan a + b $\in \Re$, disebut sebagai **jumlah**.

2. Sifat Komutatif

   Untuk sebarang bilangan a, b $\in \Re$, maka berlaku $b + a = a + b$

3. Sifat Asosiatif

   Untuk sebarang bilangan a, b, c $\in \Re$, maka berlaku
   $(a + b) + c = a + (b + c)$

4. Eksistensi unsur nol sebagai identitas

   Ada satu dan hanya satu bilangan $0 \in \Re$ yang disebut **unsur identitas**, yang memenuhi $a + 0 = a$, untuk sebarang a $\in \Re$.

5. Eksistensi unsur negatif sebagai invers

   Ada satu dan hanya satu bilangan x$\in \Re$, yang memenuhi $a + x = 0$, untuk sebarang a $\in \Re$. Bilangan ini disebut **unsur invers/negatif** dari a dan dinotasikan dengan -a.

Dari sifat-sifat pada aksioma-aksioma di atas, maka diperoleh teorema-teorema di bawah ini:

Teorema a.1.

Jika a dan b sebarang bilangan real, ada satu dan hanya satu bilangan x $\in \Re$ sedemikian hingga $a + x = b$. Bilangan x adalah $x = b + (-a)$.

Bukti.

Untuk membuktikan teorema ini, kita harus menunjukkan dua hal ,yaitu:

(i) $b + (-a)$ memenuhi persamaan $a + x = b$

(ii) tidak ada bilangan lain yang memenuhi $a + x = b$.

Untuk membuktikan (i), andaikan $x = b + (-a)$, maka perhatikan bahwa

$$a + x = a + (b + (-a)) = a + (-a + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b. \text{ (terbukti)}$$

Untuk membuktikan (ii), andaikan x adalah bilangan real sedemikian $a + x = b$. Tambahkan kedua ruas dengan (-a), kita peroleh:

$$(a + x) + (-a) = b + (-a).$$

Sekarang perhatikan,

$$(a + x) + (-a) = a + [x + (-a)] = a + [-a + x] = [a + (-a)] + x = 0 + x = x.$$

Jadi, kita simpulkan bahwa $x = b + (-a)$ dan ketunggalan solusi ini.

Cat. Bilangan $b + (-a)$ dinotasikan dengan $b - a$.

Teorema a.2.

1. Jika a bilangan real, maka $-(-a)=a$
2. Jika a dan b bilangan real, maka $-(a+b)=(-a)+(-b)$

Bukti

1. Dari definisi negatif, kita punya

$(-a)+[-(-a)]=0,\ldots\ldots(*)\quad a+(-a)=(-a)+a=0,\ldots\ldots(**)$.

Dari, Aksioma a.5, menyatakan bahwa negatif dari (-a) adalah tunggal dan (*), (**). Jadi, $a=-(-a)$.

2. Kita tahu dari definisi negatif bahwa

$(a+b)+[-(a+b)]=0,\ldots\ldots(***)$

Perhatikan kasus lain,

$[a+(-a)]+[b+(-b)]=0+0=0$

$(a+b)+[(-a)+(-b)]=0,\ldots\ldots\ldots(****)$

Dari (***) dan (****) dan aksioma a.5,

Jadi, $-(a+b)=(-a)+(-b)$

b. Aksioma Perkalian

1. Sifat Ketertutupan

   Jika a dan b bilangan real, ada satu dan hanya satu bilangan real yang dinotasikan dengan ab atau (a x b), (a.b) yang disebut dengan **kali**.
2. Sifat Komutatif

   Untuk setiap bilangan a dan b bilangan real, maka berlaku $ba=ab$.
3. Sifat Asosiatif

   Untuk setiap bilangan a, b, dan c bilangan real, maka berlaku $(ab)c=a(bc)$.
4. Eksistensi unsur satu sebagai identitas

   Ada satu dan hanya satu bilangan real u, $u\neq 0$, sedemikian hingga $au=a$, untuk setiap a bilangan real.
5. Eksistensi unsur invers

   Untuk setiap a bilangan real yang tidak nol, ada satu dan hanya satu bilangan x sedemikian hingga $ax=1$. Bilangan x ini disebut **resiprokal (invers)** dari a dan dinotasikan dengan a^{-1} *atau* $\frac{1}{a}$.
6. Sifat Distribustif

   Untuk setiap a, b, dan c bilangan real, maka berlaku $a(b+c)=ab+ac$.

Dari sifat-sifat pada aksioma-aksioma di atas, maka diperoleh teorema-teorema di bawah ini:

Teorema b.1

Jika a sebarang bilangan real, maka $a.0=0$.

Teorema b.2

Jika a dan b bilangan real dimana $a\neq 0$, maka ada satu dan hanya satu bilangan real x sedemikian hingga a . x = b. Bilangan x ini sama dengan $x=ba^{-1}$.

Teorema b.3

1. Untuk a dan b bilangan real, $ab=0$ jika dan hanya jika $a=0$ atau $b=0$ atau keduanya.
2. Untuk a dan b bilangan real, $a\neq 0\ \&\ b\neq 0$ jika dan hanya jika $ab\neq 0$.

Teorema b.4

1. Jika $a \neq 0$, maka $a^{-1} \neq 0$ dan $\left[(a^{-1})^{-1}\right] = a$.
2. Jika $a \neq 0$ & $b \neq 0$, maka $(a.b)^{-1} = (a^{-1}).(b^{-1})$.

Teorema b.5

Jika a dan b Semarang bilangan real, maka:

1. $a.(-b) = -(a.b)$
2. $(-a).b = -(a.b)$
3. $(-a).(-b) = a.b.$

Notasi: (Sifat Pecahan)

Simbol, $a.b^{-1} = \frac{a}{b} = a/b = a:b.$

Teorema b.6

1. Untuk setiap bilangan real a, maka berlaku $\frac{a}{1} = a.$
2. Jika $a \neq 0$, maka berlaku $\frac{a}{a} = 1.$

LATIHAN 1.1

1. Buktikan teorema b.1 – b.6!
2. Jika a, b, dan c sebarang bilangan real, tunjukkan bahwa $a+b+c = a+c+b = b+a+c = b+c+a = c+a+b = c+b+a.$
3. Buktikan bahwa $(a+c)+(b+d) = (a+d)+(b+c).$
4. Jika a, b, dan c sebarang bilangan real , tunjukkan bahwa $abc = acb = bac = cab = cba.$
5. Jika a, b, dan c sebarang bilangan real , tunjukkan bahwa $(ac).(bd) = (ab).(cd).$
6. Tunjukkan bahwa $a(b+c+d) = ab+ac+ad$.

1.2. Aksioma Urutan

Misalkan sistem bilangan real memuat himpunan P yang memenuhi 3 sifat berikut:

Sifat 1.

Untuk setiap bilangan real x memiliki satu dan hanya satu sifat berikut: i) $x = 0$, ii) $x \in P$ (yaitu, x >0), iii) $-x \in P$ (yaitu, $-x > 0$)

Sifat 2.

Jika $x, y \in P$, maka $x+y \in P$ $(x>0, y>0 \Rightarrow x+y>0)$

Sifat 3.

Jika $x, y \in P$, maka $xy \in P$ $(x>0, y>0 \Rightarrow xy>0)$

Sifat 1, 2, dan 3 di atas berturut-turut disebut ***sifat trikotomi, sifat ketertutupan operasi tambah, & sifat ketertutupan operasi kali***.

Himpunan P di atas disebut himpunan bilangan real positif (simbol, $x>0$ dimana $x \in P$).

Sekarang kita dapat definisikan:

- relasi a *lebih besar dari* b jika $a-b \in P$ (simbol, $a>b$)
- relasi a *lebih kecil dari* b jika $b-a \in P$ (simbol, $a<b$)

Perhatikan bahwa $a<b$ equivalen dengan $b>a$. Semarang kita definisikan juga relasi a *lebih kecil atau sama dengan* b jika $a<b$ atau $a=b$ (simbol, $a \le b$).

Contoh 1:
Jika $a < b$ dan c sebarang bilangan real, maka tunjukkan bahwa $a + c < b + c$.
Pembahasan:
Perhatikan bahwa, $a + c < b + c$.
$\Leftrightarrow \quad (b + c) - (a + c) > 0$
$\Leftrightarrow \quad b - a > 0$
$\Leftrightarrow \quad a < b$ (terbukti).

Contoh 2:
Jika $a < b$ dan $c > 0$, maka tunjukkan bahwa $ac < bc$.
Pembahasan:
Perhatikan bahwa, $a < b \Rightarrow b - a > 0$ dan karena $c > 0$, maka
$(b - a)c > 0 \Rightarrow bc - ac > 0$
Jadi, $ac < bc$ (terbukti).

LATIHAN 1.2

1. Untuk setiap pasang bilangan real a dan b, tunjukkan bahwa pasti berlaku salah satu dari $a = b, a > b,\ atau\ a < b$.
2. Buktikan pernyataan di bawah ini:
   a. Jika $a < 0, b < 0$ maka $ab > 0$
   b. Jika $a < 0, b > 0$ maka $ab < 0$
   c. Jika $a < b, b < c$ maka $a < c$
   d. Jika $a < b, c < d$ maka $a + c < b + d$
   e. Jika $a < b$ maka $-b < -a$
   f. Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$
   g. Jika $a < 0$ maka $\frac{1}{a} < 0$
   h. Jika $a > 0, b > 0$ maka $\frac{a}{b} > 0$
   i. Jika $0 < a < b, 0 < c < d$ maka $ac < bd$
   j. Jika $a > 1$ maka $a^2 > a$
   k. Jika $0 < a < 1$ maka $a^2 < a$
3. Jika $a > 0, b > 0$ dan $a^2 < b^2$ maka tunjukkan bahwa $a < b$
4. Tunjukkan bahwa untuk setiap a bilangan real berlaku $a^2 \geq 0$
5. Jika $a < b$ dan c sebarang bilangan real, maka tunjukkan $a + c < b + c$.
6. Jika $a > b$ dan $c > 0$, maka tunjukkan bahwa $ac > bc$.

2. Ketaksamaan
   2.1. Aplikasi Sifat/Aksioma Urutan
   Pada bagian ini, akan kita bahas tetang penggunaan sifat urutan bilangan yang sudah dibahas pada bagian sebelumnya dalam penyelesaian masalah ketaksamaan.
   Contoh 1:
   (OSK 2008) Diketahui bahwa a, b, c, dan d adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi $\frac{a}{c} < \frac{c}{d}$ dan $c < a$. Jika $b \neq 1$ dan $c \neq d$, maka

A. $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$
B. $\frac{b-a}{d-c} < \frac{a}{c}$
C. $\frac{a}{c} < \frac{b(d-1)}{d(b-1)}$
D. $\frac{b(d-1)}{d(b-1)} < \frac{a}{c}$
E. $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{c}$

Pembahasan:

Karena $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

$\frac{b-a}{a} > \frac{d-c}{c}$, sehingga $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$.

Jadi, Jawaban (A).

Contoh 2:

(AHSME, 1951) Diketahui $x, y > 0, x > y, \& z \neq 0$. Ketaksamaan yang selalu tidak benar adalah ...

A. $x+z > y+z$
B. $x-z > y-z$
C. $xz > yz$
D. $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$
E. $xz^2 > yz^2$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa ketaksamaan yang tidak selalu benar adalah C.
Jika z negatif, maka $xz < yz$.

LATIHAN 2.1

1. (OSK Ver 1/2006) Jika a, b bilangan asli dan $a \geq b$, maka pernyataan berikut yang salah adalah
   a. Setiap bilangan negatif c memenuhi $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$
   b. $ac = bc$ jika dan hanya jika c=0
   c. Setiap bilangan negatif c memenuhi $ac \leq bc$
   d. Jika $ac = bd$, maka $c \leq d$
   e. $a^{-10} \leq b^{-10}$
2. (AHSME, 1966) Jika $x - y > x$ dan $x + y < y$, maka
   a. $y < x$
   b. $x < y$
   c. $x < y < 0$
   d. $x < 0, y < 0$
   e. $x < 0, y > 0$
3. (AHSME, 1968) Jika x bilangan real sehingga $\frac{1}{x} < 2$ dan $\frac{1}{x} > -3$, maka

a. $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{2}$
b. $-\frac{1}{2} < x < 3$
c. $x > \frac{1}{2}$
d. $x > \frac{1}{2}$ atau $-\frac{1}{3} < x < 0$
e. $x > \frac{1}{2}$ atau $x < -\frac{1}{3}$

4. (AHSME, 1970) Jika $r > 0$, maka untuk semua p dan q sehingga $pq \neq 0$ dan $pr > qr$, maka
   a. $-p > -q$
   b. $-p > q$
   c. $1 > -\frac{q}{p}$
   d. $1 < \frac{q}{p}$
   e. Tidak ada yang benar
5. (AHSME, 1974) Pernyataan berikut yang benar adalah
   a. Jika $x < 0$, maka $x^2 > x$
   b. Jika $x^2 > 0$, maka $x > 0$
   c. Jika $x^2 > x$, maka $x > 0$
   d. Jika $x^2 > x$, maka $x < 0$
   e. Jika $x < 1$, maka $x^2 < x$
6. Misalkan a, b bilangan real sehingga $0 \le a \le b \le 1$. Buktikan bahwa $0 \le \frac{b-a}{1-ab} \le 1$
7. Jika $a \ge b, x \ge y$, maka tunjukkan $ax + by \ge ay + bx$
8. Jika $x, y > 0$, maka tunjukkan $\sqrt{\frac{x^2}{y}} + \sqrt{\frac{y^2}{x}} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y}$

2.2. Sifat Kuadrat Bilangan Real Tidak Pernah Negatif

Dalam bagian ini, kita akan terapkan konsep yang sederhana tentang ketaksamaan untuk menyelesaikan soal-soal olimpiade yakni:

$$x^2 \ge 0 \text{ untuk semua } x \in \Re \text{ .... (1)}$$

kesamaan ini berlaku jika dan hanya jika x = 0.

Lebih umum bahwa $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge 0$ .... (2)
Kesamaan ini berlaku jika dan hanya jika $x_i = 0$ untuk semua i dalam (2)

Contoh 1:

Buktikan bahwa $x^2 + y^2 \ge 2xy$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa untuk setiap x, y bilangan real berlaku:

$$(x-y)^2 \ge 0$$

$x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 2xy$ terbukti.

Contoh 2:

Tunjukkan bahwa $a + \frac{1}{a} \geq 2$ untuk setiap bilangan real a>0, dan akan merupakan kesamaan jika dan hanya jika a = 1.

Pembahasan:

Untuk setiap bilangan real a berlaku

$a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$ sehingga $a^2 + 1 \geq 2a$. Karena a>0 maka $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Selanjutnya, $a + \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow\ a = 1$. (Terbukti)

Contoh 3:

Jika a bilangan real, buktikan bahwa $4a - a^4 \leq 3$.

Pembahasan:

Andaikan benar bahwa $4a - a^4 \leq 3$.

$4a - a^4 \leq 3$

$a^4 - 4a + 3 \geq 0$

$(a^4 - 2a^2 + 1) + (2a^2 - 4a + 2) \geq 0$

$(a^2 - 1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0$

Karena untuk setiap a bilangan real, berlaku $(a^2 - 1)^2 \geq 0$ dan $(a-1)^2 \geq 0$, Maka $(a^2 - 1)^2 + 2(a-1)^2 \geq 0$ adalah suatu yang benar atau equivalen dengan $4a - a^4 \leq 3$ adalah benar. (terbukti)

Contoh 4:

Misalkan a, b, c, d bilangan real. Buktikan bahwa

$\min(a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2) \leq \frac{1}{4}$.

Pembahasan:

Misalkan semua bilangan lebih dari $\frac{1}{4}$. Maka

$a - b^2 + b - c^2 + c - d^2 + d - a^2 > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, sehingga kita peroleh bentuk

$\left(\frac{1}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - d\right)^2 < 0$ (*).

Bentuk ketaksamaan (*) sesuatu yang mustahil/kontradiksi. Jadi benar bahwa

$\min(a - b^2, b - c^2, c - d^2, d - a^2) \leq \frac{1}{4}$.

Contoh 5:

Misalkan a, b, dan c bilangan real positif dan $a + b + c = 1$. Tunjukkan bahwa

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Pembahasan:

Dari $a + b + c = 1$ maka kita peroleh bentuk

$$1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}$$
$$1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{1}{b}$$
$$1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{1}{c}$$

Jumlahkan ketiga persamaan, maka kita peroleh

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

Berdasarkan contoh 2, maka $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2, \frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2, \frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geq 2$. Oleh karena itu,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3+2+2+2=9$

Jadi, terbukti bahwa $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

Contoh 6:

Bilangan real x dan y sedemikian sehingga $x+\frac{2}{y}=\frac{8}{3}$ dan $y+\frac{2}{x}=3$. Nilai dari xy adalah ...

Pembahasan:

Kalikan kedua persamaan pada soal, maka kita peroleh:

$$xy+4+\frac{4}{xy}=8 \quad \Leftrightarrow \quad 0=(xy)^2-4xy+4=(xy-2)^2$$

Jadi, jelas bahwa xy = 2.

LATIHAN 2.2

1. (SMT, Algebra/2009) Tentukan kemungkinan nilai minimum dari $2x^2+2xy+4y+5y^2-x$ untuk bilangan real x dan y.
2. (SMT, Algebra/2006) Tentukan nilai minimum dari $2x^2+2y^2+5z^2-2xy-4yz-4x-2z+15$ untuk bilangan real x, y, z.
3. (Alberta High School MC, 2007) Nilai terkecil dari k bilangan real sedemikian sehingga $(x^2+y^2+z^2)^2\leq k(x^4+y^4+z^4)$ dimana x, y, z bilangan real.
4. (SMT, Algebra/2006) Kepala sekolah Skiner berfikir tentang dua bilangan bulat m dan n dan Seorang guru bernama Chalmers diminta mencari m dan n tersebut akan tetapi dia tidak akan dapat menentukan bilangan tersebut jika kepala sekolah hanya memberikan informasi tunggal tersebut. Kemudian Chalmers bertanya kepada Kepala Sekolah: nilai dari $mn+13m+13n-m^2-n^2$. Dari nilai pernyataan yang diajukan oleh Chalmers, maka dia akan menentukan nilai m dan n yang difikirkan Kepala Sekolah. Tentukan nilai dari pernyataan aljabar yang diajukan Chalmers kepada Kepala Sekolah?
5. Untuk setiap bilangan real tidak negatif a dan b tunjukkan bahwa berlaku $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$.
6. Untuk 4 bilangan real positif a, b, c, d, buktikan berlaku $\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$.
7. Jumlah dari n bilangan real adalah nol dan perkalian dari pasangan duan

bilangan-bilangan tersebut juga nol. Buktikan bahwa jumlah dari pangkat tiga dari bilangan-bilangan tersebut juga nol.

8. Misalkan x, y, z bilangan real positif kurang dari 4. Buktikan bahwa diantara bilangan $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}, \frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}, \frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ ada sedikitnya satu bilangan yang lebih besar atau sama dengan 1.
9. Jika $a^2+b^2=1$ dan $c^2+d^2=1$, tunjukkan bahwa $ac+bd\leq 1$
10. Jika diketahui $a^2+b^2+c^2=1$, buktikan bahwa $-\frac{1}{2}\leq ab+ac+bc\leq 1$
11. Jika a, b, c, d bilangan positif, maka tunjukkan bahwa $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$
12. Jika a dan b bilangan real positif, tunjukkan bahwa $\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$
13. Tentukan solusi bilangan real dari persamaan $\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{z-2}+\sqrt{u}+\sqrt{v}=x+y+z+u+v$
14. Tentukan solusi real dari persamaan $(x+y)^2=(x+1)(y-1)$
15. Buktikan bahwa jika x, y, z bilangan real sehingga $x^3+y^3+z^3\neq 0$, maka perbandingan $\frac{2xyz-(x+y+z)}{x^3+y^3+z^3}$ sama dengan 2/3 jika dan hanya jika $x+y+z=0$

2.3. Ketaksamaan yang berkaitan dengan rataan kuadratik, rataan aritmatika, rataan geometri, dan rataan harmonik.

Konsep tentang rataan kuadratik, aritmatika, geometri, dan harmonik ini sering digunakan dalam menyelesaikan soal-soal problem solving pada event olimpiade khususnya topik ketaksamaan. Untuk lebih jelasnya perhatikan penjelasan berikut: Untuk bilangan real positif a dan b, maka bentuk berikut $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, dan $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ berturut-turut disebut oleh rataan kuadrat (QM), rataan aritmatika (AM), rataan geometri (GM), dan rataan harmonik (HM). Secara umum, konsep tentang rataan ini, perhatikan teorema berikut:

Teorema 1

Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan real positif. Maka $QM\geq AM\geq GM\geq HM$, yakni

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Kesamaan ini berlaku jika dan hanya jika $a_1=a_2=\ldots=a_n$

Contoh 1:
Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif a, b, c, maka
$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$

Pembahasan:
Dengan menggunkan ketaksamaan AM-HM, maka kita peroleh

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\rightarrow(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.\text{ (Terbukti)}$$

Contoh 2:
(SMT, Algebra/2007) Tentukan nilai minimum dari $xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ untuk $x,y>0$

Pembahasan:
Dengan menggunkan AM-GM, maka kita peroleh

$$\frac{xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{6}\geq\sqrt[6]{xy.xy.\frac{1}{xy}.\frac{1}{x}.\frac{1}{y}}$$

$$xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 6$$

Jadi, nilai minimal $xy+x+y+\frac{1}{xy}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ adalah 6 dan tercapai saat x=y=1.

Contoh 3:
Misalkan a dan b bilangan real sehingga $a>b>0$. Tentukan kemungkinan nilai terkecil dari $a+\frac{1}{b(a-b)}$

Pembahasan:
Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM, kita peroleh

$$a+\frac{1}{b(a-b)}=(a-b)+b+\frac{1}{b(a-b)}\geq 3\sqrt[3]{(a-b)\,b\,\frac{1}{b(a-b)}}=3.$$ Kesamaan ini berlaku jika $a-b=b=\frac{1}{b(a-b)}$, yakni $a=2\ \&\ b=1$.

Jadi, nilai minimum yang mungkin untuk $a+\frac{1}{b(a-b)}$ adalah 3.

Contoh 4:
(OSP 2009) Nilai minimum dari $f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$ untuk $0<x<\pi$ adalah ...

Pembahasan:

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$$

Untuk $0<x<\pi$ maka $\sin x>0$, Dengan menggunakan AM-GM, kita peroleh

$$f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}=9x\sin x+\frac{4}{x\sin x}\geq 2\sqrt{9x\sin x.\ \frac{4}{x\sin x}}=12.$$

Tanda kesamaan terjadi jika $9x\sin x = \frac{4}{x\sin x}$ atau $x\sin x = \frac{2}{3}$.

Jadi, Nilai minimum $f(x) = \frac{9x^2\sin^2 x + 4}{x\sin x}$ adalah 12.

Contoh 5:

(OSN 2008) Buktikan bahwa untuk x dan y bilangan real positif, berlaku

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{2}{x+y+2}$$

Pembahasan:

Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM kita peroleh:

$x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ .....(1)

Tanda kesamaan terjadi jika x=1

$\left(1+\sqrt{x}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{x} + x \leq 2(x+1)$ maka

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{1}{2(x+1)} \text{............(2)}$$

Dengan cara yang sama kita peroleh, $\frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{1}{2(y+1)}$......(3).

Dari (2) dan (3), maka kita peroleh $\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right)$ ....(4)

Dengan menggunakan AM-HM, kita peroleh

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{x+1+y+1} = \frac{4}{x+y+2} \text{ ....(5)}$$

Dari (4) dan (5), maka

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \geq \frac{2}{x+y+2} \quad \text{(terbukti)}$$

Contoh 6:

Buktikan bahwa a, b, c, d ≥ 0 berlaku

$$1 + \frac{a+b+c+d}{3\sqrt{2}} \geq \sqrt[3]{ab+ac+ad+bc+bd+cd}$$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + \frac{a+b+c+d}{3\sqrt{2}} &= 1 + \frac{a+b+c+d}{6\sqrt{2}} + \frac{1+b+c+d}{6\sqrt{2}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b+c+d)^2}{72}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3}{8}(a+b+c+d)^2} \\ &\geq \sqrt[3]{ab+ac+ad+bc+bd+cd} \end{aligned}$$

LATIHAN 2.3

1. Jika x, y, z bilangan-bilangan real positip yang memenuhi $x + y + z = 6$, maka tentukan nilai terbesar dari
   a. $x^2 y^3 z$
   b. $x^3 y z^2$

2. a. Jika x, y, z bilangan-bilangan real positip yang memenuhi $x^2 + xy + y^2 = 60$, maka tentukan nilai terbesar dari $5x\,y$
   b. Jika x, y bilangan-bilangan real positip yang memenuhi $xy = 6$, maka tentukan nilai terkecil dari $21\,x + 14\,y$.

3. Volume prisma persegi panjang adalah 27 satuan volume, maka tentukan luas permukaan terkecil dari prisma tersebut

4. Jika akar-akar persamaan $x^3 - ax^2 + bx - 48 = 0$ adalah p, q, r, maka tentukan nilai terkecil dari $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} + \frac{3}{r}$

5. Buktikan untuk $a, b \geq 1$ berlaku $a + b + \frac{1}{4ab} \geq \frac{9}{4}$.

6. (OSK, 2012/Tipe 3) Diketahui $a^2 + b^2 = 5$ dan $c^2 + d^2 = 5$. Tentukan nilai maksimum dari $ac + bd$.
7. (OSP 2011) Misalkan x, y, dan z adalah bilangan real positif dengan sifat $xyz = 1$. Nilai terkecil dari $(x+2y)(y+2z)(xz+1)$ tercapai saat $x+y+z$ bernilai ....
8. (OSP 2003) Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$
9. (OSN 2003) Untuk sebarang bilangan real a, b, c Buktikan ketaksamaan $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$ dan tentukan kapan kesamaan berlaku.
10. (SMT, General Test/2011) Tentukan nilai maksimum dari $\dfrac{ab+bc+cd}{a^2+b^2+c^2+d^2}$ untuk bilangan real a, b, c, dan d yang tidak nol.
11. (SMT, Team Test/2010) Untuk $x, y, z \geq 0$, sehingga $xyz = 1$, tentukan nilai minimum untuk $x^3 + 4y^2 + 9z$.
12. Untuk $a, b, c, d \in \Re^+$, tunjukkan bahwa $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$.
13. Untuk $a, b, c, d \in \Re^+$, tunjukkan bahwa $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4$.
14. Misal a, b, c bilangan real positif dengan $a+b+c=1$, buktikan bahwa $\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geq 8$.
15. (OSN Guru 2013) Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari $x + y = \cdots$

2.4. Ketaksamaan Cauchy-Schwarz

Salah satu dari ketaksamaan yang terkenal selain yang sudah kita bahas pada 2.3 adalah ketaksamaan Cuchy-Schwarz. Ketaksamaan ini sangat membantu ketika membuktikan soal-soal yang berkaitan dengan ketaksamaan.

Teorema 2 (Ketaksamaan Cauchy-Schwarz)
Jika $a_1, a_2, ..., a_n$ dan $b_1, b_2, ..., b_n$ sebarang bilangan real, maka berlaku
$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$.
Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika $a_1 : a_2 : ... : a_n = b_1 : b_2 : ... : b_n$ atau
$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = ... = \frac{b_n}{a_n} = k$, untuk suatu konstanta k.

Contoh 1:

Jika a, b, dan c bilangan real sehingga $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, maka berapakah nilai maksimum untuk $ab + bc + ac$?
Pembahasan:
Dengan menggunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz, pilih tripel (a,b,a) & (b,c,c) maka kita dapat

$$\begin{aligned}(ab + bc + ac)^2 &\le (a^2 + b^2 + a^2)(b^2 + c^2 + c^2)\\ &= (1 - c^2 + a^2)(1 - a^2 + c^2)\\ &= (1 + x)(1 - x) \quad \text{dimana } (x = a^2 - c^2)\\ &= 1 - x^2 \le 1.\end{aligned}$$

Tanda kesamaan terjadi ketika $a = b = c = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Jadi, nilai maksimum $ab + bc + ac = 1$.

LATIHAN 2.4

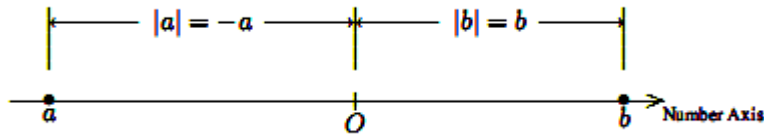
1. Jika $a,b,c > 0$, maka tunjukkan bahwa $abc(a + b + c) \le a^3b + b^3c + c^3a$.
2. Jika a, b, x, y sebarang bilangan real dengan $a^2 + b^2 = 1$ dan $x^2 + y^2 = 1$, buktikan bahwa $ax + by \le 1$.
3. Jika $x_1, x_2, ..., x_n$ sebarang bilangan positif, maka tunjukkan bahwa $(x_1 + x_2 + ... + x_n)^3 \le n^2 (x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3)$
4. Jika x,y, dan z bilangan positif sehingga $x^2 + y^2 + z^2 = 27$, buktikan bahwa $x^3 + y^3 + z^3 \ge 81$.
5. Untuk bilangan real positif a, b, dan c, buktikan bahwa $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$.
6. Misalkan x dan y bilangan real sehingga $x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2} = 1$. Buktikan bahwa $x^2 + y^2 = 1$.

3. Nilai Mutlak

3.1. Definisi

Untuk sebarang bilangan real a, kita definisikan **nilai mutlak dari a**, yang disimbolkan dengan $|a|$:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}.$$

Secara geometri, sebarang bilangan real a dinotasikan oleh titik pada garis bilangan, dan nilai mutlak a adalah jarak titik yang menyatakan a dari titik origin pada garis bilangan (the number axis).

Secara umum, ekspresi $|a-b|$ menotasikan jarak antara titik-titik pada garis bilangan yang menyatakan bilangan a dan b.

3.2. Sifat-Sifat Nilai Mutlak

Berikut ini sifat-sifat tentang nilai mutlak:

a. $|a| = |-a|$

b. $-|a| \le a \le |a|$

c. $|a| = |b|$ jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$

d. $|a^n| = |a|^n$ untuk sebarang bilangan bulat positif n

e. $|ab| = |a|\ |b|$

f. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ jika $b \ne 0$

g. $|a \pm b| \le |a| + |b|$

Contoh 1:

(OSP 2003) Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan $|x+2| + |3x| = 14$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $|x+2| = \begin{cases} x+2, & x \ge -2 \\ -(x+2), & x < -2 \end{cases}$ dan $|3x| = \begin{cases} 3x, & x \ge 0 \\ -3x, & x < 0 \end{cases}$

- Untuk $x < -2$, maka persamaan menjadi $-x-2-3x = 14$ sehingga $x = -4$ (memenuhi)
- Untuk $-2 \le x < 0$, maka persamaan menjadi $x+2-3x = 14$ sehingga $x = -6$ (tidak memenuhi)
- Untuk $x \ge 0$, maka persamaan menjadi $x+2+3x = 14$ sehingga $x = 3$ (memenuhi)

Jadi, Himpunan penyelesaian dari persamaan ini adalah $\{-4, 3\}$.

Contoh 2:

Apakah ada bilangan real x sedemikian hingga $\frac{|x-|x||}{x}$ adalah bilangan positif?

Pembahasan:

Jelas bahwa $x \ne 0$.

- Untuk $x \ge 0$, $\frac{|x-|x||}{x} = \frac{|x-x|}{x} = \frac{0}{x} = 0$.
- Untuk $x < 0$, $\frac{|x-|x||}{x} = \frac{|x+x|}{x} = \frac{|2x|}{x} = \frac{-2x}{x} = -2$.

Jadi, tidak ada bilangan real x sedemikian hingga $\frac{|x-|x||}{x}$ adalah bilangan positif.

Contoh 3:

Tentukan kondisi agar kesamaan ini berlaku: $\left|\frac{a-b}{a}\right| = \frac{b-a}{a}$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa: $a \neq 0$ dan $\left|\frac{a-b}{a}\right| = -\frac{a-b}{a}$, jadi $\frac{a-b}{a} \leq 0$.

Karena $\frac{a-b}{a} \leq 0 \Leftrightarrow 1-\frac{b}{a} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 1$.

Jadi, kondisi a dan b agar persamaan pada soal berlaku adalah $\frac{b}{a} \geq 1$.

LATIHAN 3.2

1. (OSP, 2013/ OSP 2006/AHSME 1988) Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka nilai dari $x + y$ adalah ....
2. Untuk $1 < x < 3$, sederhanakan pernyataan berikut:
   (i) $\frac{|x-3|}{x-3} - \frac{|x-1|}{(1-x)}$
   (ii) $|x-1| + |3-x|$
   (iii) $|x-2| + 2|x|$
3. Sederhanakan bentuk $\frac{|x+|x||}{x}$
4. (AHSME, 1990) Tentukan banyaknya solusi real yang memenuhi persamaan $|x-2| + |x-3| = 1$.
5. (OSK, 2005) Tentukan semua solusi persamaan $|x-1| + |x-4| = 2$.
6. Jika a, b, c bilangan real tidak nol, tentukan semua nilai yang mungkin untuk ekspresi $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$.
7. (AHSME, 1977) Untuk a, b, c bilangan real tak nol, tentukan semua kemungkinan nilai dari $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$.
8. a, b, c bilangan real yang memenuhi $(3a+6)^2 + \left|\frac{1}{4}b - 10\right| + |c+3| = 0$.
   Tentukan nilai dari $a^{10} + bc$.
9. Diketahui $m = |x+2| + |x-1| - |2x-4|$. Tentukan nilai maksimum dari m.
10. Diketahui bahwa $\frac{2x-1}{3} - 1 \geq x - \frac{5-3x}{2}$. Tentukan nilai maksimum dan minimal dari $|x-1| - |x+3|$.
11. Tentukan nilai minimum dari $|x+1| + |x-2| + |x-3|$?
12. Jika $x < 0$, tentukan nilai dari $\frac{||x| - 2x|}{3}$.
13. Diketahui a, b, c bilangan bulat. Jika $|a-b|^{19} + |c-a|^{19} = 1$, tentukan nilai dari $|c-a| + |a-b| + |b-c|$.

14. Diketahui $a = 2009$, Tentukan nilai dari
    $\left|2a^3 - 3a^2 - 2a + 1\right| - \left|2a^3 - 3a^2 - 3a - 2009\right|$.

3.3. Persamaan Nilai Mutlak

Untuk menyelesaikan persamaan linear yang melibatkan nilai mutlak, kita harus mengubah tanda nilai mutlak dalam persamaan.

Dalam kasus yang paling sederhana, $|P(x)| = Q(x)$, dimana $P(x), Q(x)$ dua ekspresi dengan $Q(x) \geq 0$, dengan sifat-sifat nilai mutlak, kita dapat mengubah tanda nilai mutlak dengan menggunakan bentuk equaivalennya:

$$P(x) = Q(x) \text{ atau } P(x) = -Q(x) \text{ atau } P^2(x) = Q^2(x)$$

Contoh 1:

Selesaikan persamaan $|x - 1| = 3$.

Pembahasan:

Alternatif 1,

Berdasarkan pengertian nilai mutlak didapat:

Jika $x \geq 1$, maka $x - 1 = 3$, sehingga $x = 4$ (memenuhi persamaan)

Jika $x < 1$, maka $1 - x = 3$, sehingga $x = -2$ (memenuhi persamaan).

Jadi, nilai x yang memenuhi: $x = -2 \text{ atau } x = 4$.

Alternatif 2,

Karena $|x - 1|$ bernilai tak negatif maka selesaiannya dapat dilakukan dengan mengkuadratkan kedua ruas.

$(x - 1)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = -2, \; x = 4$

Jadi, nilai x yang memenuhi: $x = -2 \text{ atau } x = 4$.

Contoh 2:

Selesaikan persamaan $\left|x - |3x + 1|\right| = 4$.

Pembahasan:

Berdasarkan definisi, maka kita peroleh:

$x - |3x + 1| = 4$ atau $x - |3x + 1| = -4$.

Dari $x - |3x + 1| = 4$, kita punya

$0 \leq x - 4 = |3x + 1| \Leftrightarrow -x + 4 = 3x + 1 \text{ atau } x - 4 = 3x + 1$.

Jadi, $x = \frac{3}{4} \text{ atau } x = -\frac{5}{2}$, ini kontradiksi dengan $x \geq 4$ sehingga dua solusi tersebut tidak ada yang memenuhi.

Dari $x - |3x + 1| = -4$, kita punya

$0 \leq x + 4 = |3x + 1| \Leftrightarrow -x - 4 = 3x + 1 \text{ atau } x + 4 = 3x + 1$.

Jadi, $x = \frac{-5}{4}$ atau $x = \frac{3}{2}$. Dua solusi tersebut memenuhi persamaan pada soal karena nilai x tersebut terletak pada selang $(x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4)$.

Jadi, selesaian dari persamaan tersebut pada soal adalah $x_1 = -\frac{5}{4}, \; x_2 = \frac{3}{2}$.

Contoh 3:

Jika $\left| |4m+5| - b \right| = 6$ adalah persamaan dalam m, dan persamaan tersebut memiliki 3 solusi berbeda, tentukan nilai bilangan rasional b.

Pembahasan:

Dari persamaan yang diketahui kita memiliki (i) $|4m+5| - b = 6$ atau (ii) $|4m+5| - b = -6$.

Jika (i) memiliki tepat satu solusi, maka $b+6=0$ (b = -6) yang mengakibatkan (ii) menjadi $|4m+5| = -12$ (tidak memiliki solusi untuk m), jadi $b \neq -6$..

Jika (i) memiliki tepat dua solusi dan (ii) memiliki tepat satu solusi, jadi $b-6=0$ (b =6). Jika b= 6, maka (i) menjadi $|4m+5| = 12$,

$$4m+5=12 \ \ atau \ \ 4m+5=-12,$$

$$m=\frac{7}{4} \ atau \ \ m=-\frac{17}{4}, \text{ dan dari (ii) } m=-\frac{5}{4}.$$

Jadi, nilai b = 6.

Contoh 4:

Jika $|x+1| + (y+2)^2 = 0$ dan $ax - 3ay = 1$, tentukan nilai dari a.

Pembahasan:

Karena $|x+1| \geq 0$ dan $(y+2)^2 \geq 0$ untuk semua nilai x dan y, jadi $x+1=0$ & $y+2=0$ yaitu, $x=-1$, $y=-2$. Substitusikan nilai tadi ke persamaan $ax-3ay=1$, maka kita peroleh $a=\frac{1}{5}$.

LATIHAN 3.3

1. Selesaikan persamaan $|5x-4| - 2x = 3$.
2. Selesaikan persamaan $\left| \left| |x| - 2 \right| - 1 \right| = 3$.
3. Jika $|x-2| + x - 2 = 0$, maka range untuk x adalah ....
4. Selesaikan persamaan $|x-1| + 2|x| - 3|x+1| - |x+2| = x$.
5. (CHINA, 2000) a adalah bilangan bulat yang memenuhi persamaan $|2a+7| + |2a-1| = 8$. Tentukan banyaknya solusi untuk a.
6. (OSP, 2006) Diberikan fungsi $f(x) = \left| |x-2| - a \right| - 3$. Jika grafik f memotong sumbu-x tepat di tiga titik, maka nilai a sama dengan ....
7. Berapa banyak pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan $|xy| + |x-y| = 1$?
8. Jika $|x+1| - |x-3| = a$ adalah persamaan dalam x dan persamaan ini memiliki tak hingga banyak solusi, tentukan nilai a.
9. (AHSME, 1984) Banyanya solusi berbeda dari persamaan $\left| x - |2x+1| \right| = 3$ adalah ...
10. (CHNMOL, 1987) Diketahui persamaan $|x| = ax + 1$ memiliki tepat satu solusi negatif dan tidak memiliki solusi positif, maka tentukan range untuk a.

11. (CHNMOL, 1986) Jika persamaan $||x-2|-1|=a$ memiliki tepat tiga solusi bulat untuk x, maka tentukan nilai a.
12. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} |x-y| = x+y-2 \\ |x+y| = x+2 \end{cases}$
13. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} |x-2y| = 1 \\ |x|+|y| = 2 \end{cases}$
14. Selesaikan sistem persamaan: $x+3y+|3x-y|=19$ & $2x+y=6$.

3.4. Ketaksamaan Nilai Mutlak

Teknik yang paling penting untuk menyelesaikan ketaksamaan nilai mutlak adalah sama saja dengan menyelesaikan persamaan nilai mutlak yaitu cukup mengubah tanda nilai mutlak, sedemikian hingga ketaksamaan tersebut menjadi ketaksamaan normal untuk diselesaikan.

Metode Dasar untuk Mengubah Tanda Nilai Mutlak

(i) $|a| \le b$ ekuivalen dengan $-b \le a \le b$.
Jika $b < 0$, maka $-b \le a \le b$ tidak mempunyai solusi untuk a.

(ii) $|a| \ge |b|$ ekuivalen dengan $a^2 \ge b^2$.

(iii) $|a| \ge b$ ekuivalen dengan $a \le -b$ atau $a \ge b$.

(iv) Untuk mensederhanakan ketaksamaan yang diketahui dan mengubah tanda nilai mutlak, harus menggunakan metode substitusi variabel seperti $y=|x|$.

(v) Jika dua atau lebih pasang tanda mutlak ada pada "layer" yang sama dari ketaksamaan yang diketahui, metode umum untuk mengubah tanda nilai mutlak adalah mempartisi range dari variabel kedalam beberapa interval. Untuk ini, kita cukup memisalkan **pembuat nol masing ekspresi, dan mengambil akar-akar ini menjadi titik-titik partisinya**. Sebagai contoh:

$$|x-2|+|x-4|<3,$$

maka garis bilangan dipartisi menjadi 3 interval yaitu: $(-\infty,2], (2,4], \ \& \ (4,\infty)$, dimana 2 dan 4 diperoleh dengan cara menjadi pembuat nol berturut-turut untuk $x-2$ dan $x-4$.

Contoh 1:

Selesaikan ketaksamaan dari $|x^2-2x+5|<4$.

Pembahasan:

$$|x^2-2x+5|<4 \quad \Leftrightarrow -4 < x^2-6x+5<4$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2-6x+9 \text{ dan } x^2-6x+1<0$$

Dari $0<x^2-6x+9 \Rightarrow (x-3)^2>0 \Rightarrow x \ne 3$, dan

Dari $x^2-6x+1<0 \Rightarrow 3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$.

Jadi, himpunan selesaiannya adalah $\{3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}\}-\{3\}$

Contoh 2:

Tentukan himpunan selesaian dari ketaksamaan $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \le 1$.

Pembahasan:

Jelas bahwa $x \neq 1$ dan $|x-1| > 0$, sehingga kita peroleh:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leq 1 \quad \Leftrightarrow |x+1| \leq |x-1|$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 \leq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq x^2 2x + 1 \Leftrightarrow 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Jadi, himpunan selesaiannya adalah $\{x \leq 0\}$.

Contoh 3:

Tentukan himpunan selesaian dari ketaksamaan $|x^2 - x| > 2$.

Pembahasan:

Karena $|x^2 - x| > 2 \Leftrightarrow x^2 - x < -2$ *atau* $x^2 - x > 2$.

Dari $x^2 - x < -2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 < 0$. Ketaksamaan ini tidak memiliki solusi real (mengapa?)

Dari $x^2 - x > 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ *atau* $x > 2$.

Jadi, himpunan selesaiannya adalah $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Contoh 4:

Selesaikan ketaksamaan dari $x^2 - 2x - 5|x-1| + 7 \leq 0$.

Pembahasan:

$x^2 - 2x - 5|x-1| + 7 = (x^2 - 2x + 1) - 5|x-1| + 6 = (x-1)^2 - 5|x-1| + 6,$

Misal $y = |x-1|$, ketaksamaan yang diketahui menjadi:

$$y^2 - 5y + 6 \leq 0$$
$$(y-2)(y-3) \leq 0$$
$$\therefore\ 2 \leq y \leq 3 \text{.......(*)}$$

Susbtitusikan $y = |x-1|$ ke (*), kita peroleh bentuk:

$$2 \leq |x-1| \leq 3.$$

Dari $2 \leq |x-1|$, maka $x - 1 \leq -2$ *atau* $x - 1 \geq 2$, jadi solusinya adalah

$$x \leq -1 \text{ atau } x \geq 3 \text{ ....(**)}$$

Dari $|x-1| \leq 3$, maka $-3 \leq x - 1 \leq 3$, jadi solusinya adalah $-2 \leq x \leq 4$......(***)

Dari (**) dan (***) kita iriskan, maka solusi dari ketaksamaan pada soal adalah

$-2 \leq x \leq -1$ atau $3 \leq x \leq 4$

LATIHAN 3.4

1. Selesaikan ketaksamaan berikut:

   (i) $|x^2 + x + 1| \leq 1.$

   (ii) $|3 - 2x| \leq |x + 4|.$

   (iii) $\dfrac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1.$

   (iv) $|x + 3| > 2x + 3.$

(v) $\left|x^2-4x-5\right|>x^2-4x-4$

(vi) $|x+1|>\frac{2}{x}$

(vii) $|x+1|+|x-2|\le 3x.$

(viii) $\frac{6}{|x|+1}<|x|$

(ix) $\frac{1-|x|}{3|x|-6}>0$

(x) $\frac{|x|}{x}<\left|x^2-1\right| \quad (x\ne 0)$

2. Selesaikan ketaksamaan dari $\frac{3x^2-8|x|-3}{x^2+2x+3}\ge 0.$
3. Tentukan himpunan selesaian dari $2|x|-|x-2|\ge 0.$
4. Selesaikan ketaksamaan dari $|2x-1|+|x+1|>2.$
5. (CHNMOL/1995) Diketahui bahwa a, b memenuhi ketaksamaan $\left||a|-(a+b)\right|<\left|a-|a+b|\right|$, tunjukkan bahwa $a<0, b>0$
6. (AHSME/1964) Jika x bilangan real dan $|x-4|+|x-3|<a,$ tunjukkan bahwa $1<a.$
7. (CHINA/2005) Diketahui bahwa a, b bilangan rasional yang memenuhi ketaksamaan $\left||a|+(a-b)\right|>\left|a+|a-b|\right|$, tunjukkan bahwa $a<0, b<0.$
8. (CHINA/2004) Selesaikan ketaksamaan $\frac{\left|2y+|y|+10\right|}{\left|6y+2|y|+5\right|}>1.$

4. Polinomial/Suku Banyak

Definisi Polinomial

Misalkan ρ menyatakan sistem bilangan real atau sistem bilangan rasional dan n merupakan bilangan bulat non-negatif.

Bentuk $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$

dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \rho$ dan $a_n \ne 0$ disebut polinomial atas ρ berderajat n. Kemudian dua buah polinomial berderajat tidak nol dikatakan identik atau sama jika derajatnya sama dan koefisien dengan x berpangkat sama juga sama. Jadi, dua polinomial $f(x)$ dan $g(x)$ dengan $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ dan $g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$ dikatakan identik $(f(x)=g(x))$ untuk setiap x jika $n=m$ dan $a_n=b_m, a_{n-1}=b_{m-1},\ldots, a_1=b_1, \& \, a_0=b_0$.

Nilai suatu Polinomial

Contoh 1:

Hitunglah $f(5)$ jika $f(x)=2x^3+4x^2-3x+2.$

Pembahasan:

$f(x)=2x^3+4x^2-3x+2 \to f(5)=2.5^3+4.5^2-3.5+2=337$

Contoh 2:

Jika $p(x)$ merupakan sukubanyak derajat tiga dengan $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 3$, $p(4) = 5$. Tentukan $p(6)$.

Pembahasan:

Misalkan $g(x) = p(x) - x$.

Perhatikan bahwa $g(x)$ adalah sukubanyak yang berderajat 3 dan

$$g(1) = g(2) = g(3) = 0.$$

Sehingga $g(x) = c(x-1)(x-2)(x-3)$, untuk suatu konstanta c.

$g(4) = c(4-1)(4-2)(4-3) = 6c.$

$dan \quad g(4) = p(4) - 4 = 1.$

Sehingga, $c = 1/6$.

Akhirnya:

$$p(6) = g(6) + 6 = \frac{(6-1)(6-2)(6-3)}{6} + 6 = 16.$$

Pembagian Polinomial

Teorema 1 (Algoritma Pembagian)

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ suatu polinomial di $\rho(x)$ dan g(x) bukan polinomial nol. Maka terdapat polinomial $q(x)$ dan r(x) di $\rho(x)$ yang tunggal dan memenuhi

$$f(x) = q(x)\,g(x) + r(x)$$

dengan $r(x)$ merupakan polinomial nol atau polinomial bukan nol yang berderajat kurang dari derajat g(x).

Dari teorema di atas, q(x) merupakan *hasil bagi* dan r(x) adalah *sisa pembagian*. Jika r(x) polinomial nol, maka dikatakan f(x) habis dibagi oleh g(x).

Dalam menentukan hasil bagi dan sisa pembagian, ada dua cara yang akan dibahas di buku ini, yakni (i) Pembagian panjang (ii) Pembagian sintetik/Horner. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut:

Contoh 3:

Jika $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ dibagi oleh $g(x) = x + 2$, tentukan hasil bagi dan sisa pembagiannya dengan menggunakan pembagian panjang.

Pembahasan:

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 1 \\ \hline x+2 & 3x^2 + 5x - 7 \\ & 3x^2 + 6x \\ \hline & \quad -x - 7 \\ & \quad -x - 2 \\ \hline & \qquad -5 \end{array}$$

Jadi, Hasil bagi: $q(x) = 3x - 1$ dan sisa pembagiannya: $r(x) = -5$.

Contoh 4:

Gunakan pembagian horner untuk menentukan hasil bagi dan sisa pembagian

polinomial $2x^4 - 3x^3 - x^2 + 5x + 6$ jika dibagi oleh $x+1$.

Pembahasan:

Dengan menggunkan pembagian horner, maka kita peroleh:

-1	2	-3	-1	5	6
		-2	5	-4	-1
	2	-5	4	1	5

Jadi, hasil baginya $q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ dan sisa pembagiannya $r(x) = 5$.

Teorema 2 (Teorema Sisa)

Jika polinomial $f(x)$ dibagi oleh $(x-a)$ maka sisanya adalah $f(a)$.

Teorema 3 (Teorema Faktor)

Polinomial $f(x)$ habis dibagi oleh (x-a) jika dan hanya jika a merupakan akar dari $f(x)$ atau dengan kata lain $f(x)$ memepunyai faktor $(x-a)$ jika dan hanya jika $f(a) = 0$.

Teorema 4

Untuk suatu polinomial dengan koefisien bilangan bulat,

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ jika polinomial ini mempunyai faktor $\left(x - \frac{p}{q}\right)$ dimana $FPB(p,q) = 1$, maka p faktor dari a_o dan q faktor dari a_n.

Teorema Vieta

- ✓ Jika polinomial $ax^2 + bx + c$ mempunyai akar-akar x_1 & x_2 maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

- ✓ Jika polinomial $ax^3 + bx^2 + cx + d$ mempunyai akar-akar $x_1, x_2,$ & x_3 maka:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{d}{a}$$

- ✓ Secara umum, Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah akar-akar polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ maka:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = (-1)^2\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$x_1x_2x_3...x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

✓ Beberapa rumus berkaitan dengan teorema vieta:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) + 3x_1x_2x_3$$

Contoh 5:

Tentukan sisa jika $(x+3)^5 + (x+2)^8 + (5x+9)^{1997}$ dibagi oleh $(x+2)$.

Pembahasan:

Misalkan $f(x) = (x+3)^5 + (x+2)^8 + (5x+9)^{1997}$.
Sisa jika $f(x)$ dibagi oleh (x + 2) adalah $f(-2) = 0$.

Contoh 6:

Misalkan $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Tentukan sisa jika $f(x^5)$ dibagi oleh $f(x)$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $f(x)\,(x-1) = x^5 - 1$ dan
$f(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5.$

Jelas bahwa, suku yang ada dalam kurung pada f(x^5) habis dibagi $x^5 - 1$ dan f(x).
Jadi, sisanya adalah 5.

Contoh 7:

Jika polinomial $f(x)$ mempunyai sisa berturut-turut 3 dan 5 jika dibagi oleh $x-1$ dan $x-2$. Tentukan sisa pembagian jika $f(x)$ dibagi oleh $(x-1)\,(x-2)$.

Pembahasan:

Dari Teorema Sisa,

$$f(x) = (x-1)\,q_1(x) + 3 \rightarrow f(1) = 3 \quad \text{dan}$$
$$f(x) = (x-2)\,q_2(x) + 5 \rightarrow f(2) = 5$$

Misal $f(x) = (x-1)\,(x-2)\,q_3(x) + (ax+b)$ dimana sisanya adalah $r(x) = ax + b$,
Perhatikan bahwa $f(1) = a + b = 3$ (*) dan $f(2) = 2a + b = 5$ (**). Eliminasi (*) dan (**) maka kita peroleh $a = 2$ & $b = 1$
Jadi, sisa pembagian f(x) dibagi oleh $(x-1)\,(x-2)$ adalah 2x+1.

Contoh 8:

Faktorkan $f(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

Pembahasan:

Berdasarkan toerema 4, jika $f(x) = 0$ mempunyai akar rasional, maka persamaan tersebut harus mempunyai akar-akar bulat dan salah satunya adalah dalam himpunan $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Karena $f(1) = f(-1) = 0$, berdasarkan teorema faktor, maka f mempunyai faktor $(x-1)$ & $(x+1)$. Untuk mengecek bilangan yang lain di S, kita gunakan pembagian horner,

2	1	1	−7	−1	6
		2	6	−2	−6
	1	3	−1	−3	0

Sehingga hasil bagi $q_1(x)$ dari $f(x)$ jika dibagi oleh $(x-2)$ adalah x^3+3x^2-x-3, sisanya 0, jadi $(x-2)$ adalah faktor ketiga dari f(x). Kemudian, kita mengecek faktor $(x+3)$

Dengan menggunakan pembagian horner,

−3	1	3	−1	−3
		−3	0	3
	1	0	−1	0

Sehingga, hasil bagi $q_2(x)$ dari x^3+3x^2-x-3 jika dibagi (x+3) adalah x^2-1, sisanya 0. Jadi, (x+3) faktor keempat.

Jadi, $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+3)$.

Contoh 9:

Jika $x_1, x_2, \& \ x_3$ akar-akar persamaan dari $x^3-12x^2-10x+16=0$, maka tentukan

a. $x_1+x_2+x_3$

b. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

c. $x_1^2+x_2^2+x_3^2$

Pembahasan:

Dari persamaan yang diketahui maka kita peroleh $a=1, b=-12, c=-10, \& \ d=16$

a. $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=12$

b. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=-10$

c. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$=114+20=134.$

Contoh 10:

(OSP 2012) Jika p, q, dan r akar-akar dari $x^3-x^2+x-2=0$, maka $p^3+q^3+r^3=\cdots$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$p+q+r=1$

$pq+pr+qr=1$

$pqr=2$

$(\mathrm{p}+\mathrm{q}+\mathrm{r})^3=p^3+q^3+r^3+3p^2q+3p^2r+3pq^2+3pr^2+3q^2r+3qr^2+6pqr$

$(p+q+r)^3=p^3+q^3+r^3+3(pq+pr+qr)(p+q+r)-3pqr$

$1^3=p^3+q^3+r^3+3(1)(1)-3(2)$

$p^3+q^3+r^3=4.$

Contoh 11:
(AIME 1983) Tentukan hasil kali perkalian akar-akar real persamaan $x^2 + 18x + 30 = 2\sqrt{x^2 + 18x + 45}$.
Pembahasan:
Misalkan $y = \sqrt{x^2 + 18x + 45}$. .... (*)
Perhatikan bahwa jika x bilangan real, maka y harus bilangan non-negatif ($y \geq 0$).
Persamaan pada soal equivalen dengan

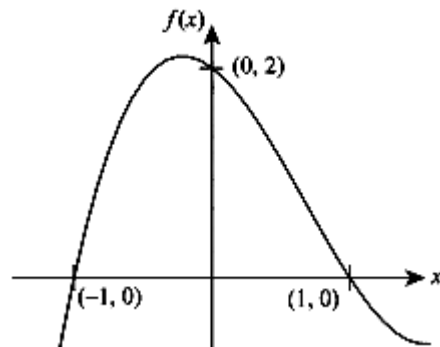
$$y^2 - 15 = 2y$$
$$(y-5)(y+3) = 0$$

Sehingga kita peroleh $y = 5 \quad atau \quad y = -3$. Jelas bahwa y = -3 (TM)
Sehingga nilai y adalah 5 dan substitusikan y = 5 ke (*), kita peroleh bentuk:
$x^2 + 18x + 20 = 0$

Jadi, hasil kali akar-akar dari persamaan yang diberikan adalah 20.

LATIHAN 4

1. (USAMO 1984) Perkalian dua dari empat akar-akar persamaan $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ adalah -32. Tentukan nilai k.
2. (OSK 2010) Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b, dan c. Nilai dari $a^3 + b^3 + c^3$ adalah ...
3. (OSK 2010) Jika a dan b bilangan bulat sehingga $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ merupakan solusi persamaan kuadrat $x^2 + ax + b = 0$, maka nilai $a + b$ adalah ....
4. (OSK 2010) Jika $-5x + 2000$ merupakan sisa pembagian suku banyak $P(x)$ oleh $(x^2 + x - 2)$, maka sisa pembagian $P(x)$ oleh $(x + 2)$ adalah ....
5. (OSK 2008) Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka b=...
6. (OSK 2003) Misalkan $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$ dan bahwa $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5)$. Berapakah nilai a?
7. (OSP 2011) Jika kedua akar persamaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah ....
8. (OSP 2010/AMRL 1984) Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c, dan d konstanta. Jika $P(1) = 10, P(2) = 20, \& P(3) = 30.$ maka nilai $\frac{P(12) + P(-8)}{10} = ...$
9. (OSP 2010) Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real $\alpha \ \& \ \beta$. Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ....
10. (OSP 2009) Misalkan a, b, c adalah akar-akar polinom $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$. Jika $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ adalah polinom dengan akar-akar $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ maka $f(1) = ...$
11. (OSP 2008) Misalkan a, b, c, dan d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua di antaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah ...

12. (OSP 2008) Suatu polinom f(x) memenuhi persamaan $f\left(x^2\right)-x^3 f(x)=2\left(x^3-1\right)$ untuk setiap x bilangan real. Derajat (pangkat tertinggi x) dari f(x) adalah ...
13. (OSP 2006) Jika $(x-1)^2$ membagi ax^4+bx^3+1, maka ab=...
14. (OSP 2005/Bagian Dua) Jika $\alpha, \beta, \& \gamma$ adalah akar-akar persamaan $x^3-x-1=0$, tentukan $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$.
15. (ARML/1983) Jika a, 3a, 5a, b, b+3, dan b+5 adalah semua akar-akar persamaan polinom berderajat empat dimana $0<a<b$, hitunglah semua kemungkinan nilai dari a?
16. (ARML/1985) Misalkan $P(x)=0$ persamaan polinom berderajat lima dengan koefisien bulat dengan sedikitnya satu akar bulat. Jika $P(2)=13$ dan $P(10)=5$, Hitunglah nilai x sehingga memenuhi $P(x)=0$.
17. (NYSML/1988) Akar-akar dari $x^3+Px^2+Qx-19=0$ adalah masing-masing satu lebihnya dari akar-akar persamaan $x^3-Ax^2+Bx-C=0$. Jika A, B, C, P, dan Q kosntanta, Hitunglah nilai $A+B+C$.
18. (ARML/1988) Akar-akar dari $x^4-Kx^3+Kx^2+Lx+M=0$ adalah a, b, c, dan d. Jika K, L, dan M bilangan real, hitung nilai minimum dari $a^2+b^2+c^2+d^2$.
19. (AMC 12A/2002) Berapakah jumlah semua akar-akar dari $(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$?
20. (AMC 12A/2003) Grafik polinom $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ mempunyai 5 titik potong berbeda dengan sumbu X, satu diantaranya (0,0). Dari konstanta a, b, c, d, atau e, manakah yang tidak mungkin sama dengan nol?
21. (AMC 12B/2003) Bagian grafik dari $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ditunjukkan di bawah ini. Berapakah nilai b?

22. (AMC 12A/2005) Misalkan $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$. Berapa banyak polinom Q(x) yang ada sehingga $P(Q(x))=P(x).R(x)$ dimana R(x) polinom berderajat 3.
23. (AHSME/1966) Jika tiga akar-akar dari $x^4+ax^2+bx+c=0$ adalah 1, 2, dan 3, maka nilai dari $a+c$ adalah ...
24. (AHSME/1969) Sisa pembagian R diperoleh dengan membagi x^{100} dengan x^2-3x+2. Jika derajat R(x) kurang dari 2, Maka R(x) dapat ditulis sebagai ...
25. (AHSME/1970) Jika dua faktor dari $2x^3-hx+k$ adalah (x+2) dan (x-1), maka nilai dari $|2h-3k|$ adalah ...
26. (AHSME/1974) Berapakah sisa pembagian jika $x^{51}+51$ dibagi oleh $x+1$?
27. (AHSME/1975) Jika p, q, dan r adalah tiga akar berbeda dari $x^3-x^2+x-2=0$, maka $p^3+q^3+r^3$ sama dengan ...

28. (AHSME/1976) Suatu polinom P(x) mempunyai sisa 3 ketika dibagi oleh (x-1) dan bersisa 5 ketika dibagi (x-3). Sisa pembagian ketika P(x) dibagi oleh (x-1)(x-3) adalah ...

29. (AHSME/1977) Misalkan $g(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. Berapakah sisa pembagian ketika polinom $g\left(x^{12}\right)$ dibagi oleh polinom g(x)?
30. (AHSME/1980) Derajat dari $\left(x^2+1\right)^4\left(x^3+1\right)^3$ sebagai polinom dalam x sama dengan ...
31. (AHSME/1980) Untuk suatu bilangan real r, polinom $8x^3-4x^2-42x+45$ habis dibagi oleh $(x-r)^2$. Tentukan nilai dari $\lfloor r \rfloor$. *Dimana* $\lfloor x \rfloor$ *menyatakan bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan x.*
32. (AHSME/1980) Polinom $x^{2n}+1+(x+1)^{2n}$ tidak habis dibagi oleh x^2+x+1 jika n sama dengan ...
33. (AHSME/1985) Jika polinom x^3-2 dibagi oleh polinom x^2-2, sisa pembagiannya adalah ...
34. (AHSME/1985) Misalkan $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$, dimana a, b, dan c konstanta. Jika $f(-7)$, maka $f(7)=\ldots$
35. (NYIML, Fall/1977) Persamaan $x^3-x^2+mx+1=0$ mempunyai tiga akar, dimana dua diantaranya sama. Tentukan nilai m.
36. (NYIML, Spring/1980) Polinom f(x), dengan koefisien bilangan real dan berderajat 3. Jika $f(4)=f(-4)=-4$, dan $f(0)=1$, berapa banyak solusi yang ada untuk persamaan $f(x)=0$?
37. (NYIML, Spring/1980) P(x) dan Q(x) adalah polinom-polinom dengan koefisien bilangan bulat positif sehingga $(Q(x))^2=(P(x))^2+2x^2+1$. Tentukan polinom Q(x).
38. (NYIML, Fall/1981) Derajat polinom f(x) lebih dari 3, dan $f\left(x^2\right)=(f(x))^2$ untuk semua bilangan real x. Tentukan koefisien x^3 dalam polinom f(x).

5. Fungsi

5.1. Operasi Biner

Definisi

Suatu operasi biner pada suatu himpunan bilangan adalah suatu cara mengambil dua dari kumpulan bilangan-bilangan dan menghasilkan bilangan yang ketiga.

Pada umumnya, operasi biner dalam kompetisi-kompetisi matematika akan dinyatakan dengan menggunakan simbol-simbol yang tidak biasanya, seperti e, σ, $atau\ \psi$. Hasil dari operasi setelah diterapkan pada bilangan a dan b biasanya di tulis sebagai $\mathrm{e}(a,b)\ atau\ a\,\mathrm{e}\,b$.

Contoh 1:

(AHSME, 1993) Didefinisikan operasi " ∞ " dengan $x\infty y=4x-3y+xy$ untuk semua bilangan real x dan y. Berapa banyak bilangan real y yang memenuhi $12=3\infty y$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$12=3\infty y=4.3-3.y+3.y=12$

Jadi, persamaan pada soal benar untuk sebarang bilangan real y.

Contoh 2:
(AHSME, 1996) Fungsi $E(n)$ didefinisikan untuk masing-masing bilangan bulat positif n sebagai penjumlahan digit genap dari n. Sebagai contoh, $E(5681) = 6 + 8 = 14$. Berapakah nilai dari $E(1) + E(2) + \cdots + E(100)$?
Pembahasan:
Dari pada menentukan E(n) secara satu per satu, maka perhatikan bahwa bilangan:

00, 01, 02, ..., 99

memuat bilangan yang sama dengan digit 0, 1, 2, ..., 9. Ada total 2.100=200 digit , sehingga ada 200/10=20 untuk tiap-tiap digitnya.
Jadi, $E(0) + E(1) + \cdots + E(99) = 20(0 + 2 + 4 + 6 + 8) = 400$

Karena E(0)=E(100)=0, maka $E(1) + E(2) + \cdots + E(100) = 400$.

LATIHAN 5.1

1. (OSK, 2002) Jika untuk setiap x, y bilangan real berlaku $x\$y = xy - x + y$, maka $(x + y)\ \$\ (x - y)$ sama dengan ....
   A. $x^2 - y^2 + 2x$ C. $x^2 - y^2 + 2y$ E. $x^2 - y^2$
   B. $x^2 - y^2 - 2x$ D. $x^2 - y^2 - 2y$
2. (OSP, 2002) Didefinisikan $a * b = a + b + ab$, untuk semua bilangan real a dan b. Jika $S = \{a\ bilangan\ real,\ \ a * (-a) > a\}$, tuliskan S sebagai sebuah selang(interval).
3. (OSK, 2006) Didefinisikan $a * b = a + b + 1$ untuk semua bilangan bulat a dan b. Jika p memenuhi $a * p = a$, untuk setiap bilangan bulat a, maka p sama dengan ...
4. (AMC, 2002/10A) Untuk bilangan real tidak nol a, b, dan c, didefinisikan $(a, b, c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$. Berapakah nilai dari $(2, 12, 9)$?
5. (AMC, 2002/10B) Untuk bilangan real tidak nol a, b, dan c, didefinisikan
   $$(a, b, c) = \frac{abc}{a + b + c}$$
   Berapakah nilai dari (2, 4, 6)?
6. (AMC, 2003/10A) Didefinisikan $x * y = |x - y|$ untuk semua bilangan real x dan y. Manakah pernyataan berikut yang **tidak** benar?
   A. $x * y = y * x$ untuk semua x dan y
   B. $2(x * y) = (2x) * (2y)$ untuk semua x dan y
   C. $x * 0 = x$ untuk semua x
   D. $x * x = 0$ untuk semua x
   E. $x * y > 0$ jika $x \neq y$

7. (AMC, 2003/10B) Misalkan $@(x)$ menyatakan jumlah dari digit-digit dari bilangan bulat positif x. Sebagai contoh, $@(8) = 8$ dan $@(123) = 1 + 2 + 3 = 6$. Berapa banyak bilangan x dua digit sehingga $@(@(x)) = 3$?
8. (AMC, 2004/10A) Untuk sebarang tiga bilangan real a, b, dan c dengan $b \neq c$, Operasi $\nexists$ didefinisikan $\nexists(a, b, c) = \frac{a}{b-c}$?
   Berapakah nilai $\nexists\left(\nexists(1,\ 2,\ 3),\ \nexists(2, 3, 1), \nexists(3, 1, 2)\right)$?

9. (AMC, 2005/10A) Untuk tiap pasangan bilangan real $a \neq b$, didefinisikan operasi * sebagai
$$a * b = \frac{a+b}{a-b}.$$
Berapakah nilai dari $(1 * 2) * 3$?
10. (AMC, 2005/10B) Untuk bilangan real a dan b, didefinisikan $a\Delta b = \sqrt{a^2+b^2}$. Berapakah nilai dari $(5\Delta 12)\Delta\big((-12)\Delta(-5)\big)$?
11. (AMC, 2006/10A) Didefinisikan $x\nabla y = x^3 - y$. Berapakah $h\nabla(h\nabla h)$?
12. (AMC, 2006/10B) Untuk bilangan real x dan y, didefinisikan
$$x\varphi y = (x+y)(x-y)$$
Berapakah nilai dari $3\varphi(4\varphi 5)$?
13. (AMC, 2007/10A) Didefinisikan $\begin{cases} a@b = ab - b^2 \\ a\#b = a + b - ab^2 \end{cases}$
Berapakah nilai dari $\frac{6@2}{6\#2}$?
14. (AMC, 2007/10B) Didefinisikan operasi ^ sebagai berikut:
$$a\text{^}b = (a+b)b.$$
Berapakah nilai dari $(3\text{^}5) - (5\text{^}3)$?

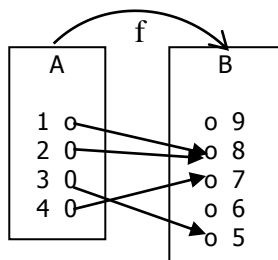
5.2. Definisi, Domain/Range Fungsi, & Notasi Fungsi

Definisi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut **domain (daerah asal)**, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai dari himpunan ke dua ini disebut **range/daerah hasil.**

Domain dan Range Fungsi

Pada suatu fungsi $f: A \to B$, A disebut domain, B disebut kodomain, dan himpunan B yang mempunyai pasangan di A disebut range. Simbol dari domain, kodomain, dan range dari fungsi f berturut-turut adalah $D_f, C_f, \& R_f$.

Sebagai contoh:

Dari gambar di atas, maka kita peroleh:

Domain f adalah $D_f = A = \{1, 2, 3, 4\}$

Kodomain f adalah $C_f = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Range f adalah $R_f = \{5, 7, 8\} \subset B$.

Notasi Fungsi

Untuk menulis notasi suatu fungsi dipakai suatu huruf tunggal seperti f (atau g atau F). Tanda fungsi $f(x)$ boleh dinotasikan $f : x$ dan dibaca "*f dari x*" atau "*f pada x*". Misalkan $f(x) = x^3 - 4$, dapat dinyatakan sebagai $f : x \to x^3 - 4$ yang artinya "f adalah fungsi yang memetakan x ke $x^3 - 4$".

Menentukan nilai statu fungsi, Misalkan $f(x) = x^3 - 4$, maka:

$f(2) = 2^3 - 4 = 4$;
$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$;
$f(a) = a^3 - 4$.

5.3. Jenis-Jenis Fungsi
Beberapa jenis fungsi yang akan dibahas dalam buku ini adalah: Fungsi konstan, Fungsi identitas, Fungsi genap/Ganjil, Fungsi modulus, Fungsi linear, Fungsi Kuadrat, dan Fungsi bilangan bulat terbesar (Floor)/Fungsi Bilangan bulat terkecil (Ceiling).

Fungsi Konstan

Fungsi konstan adalah suatu fungsi f yang dinyatkan dengan rumus $f(x) = a$, dengan a suatu konstanta.

Fungsi Identitas

Fungsi identitas adalah suatu fungsi I yang dinyatakan dengan rumus $I(x) = x$.

Fungsi Genap & Ganjil

Jika $f(-x) = f(x)$, maka grafik simetri terhadap sumbu y. Fungsi yang demikian disebut **fungsi genap.** Sebagai contoh: $f(x) = x^2 - 2$, $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$, dan $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$

Jika $f(-x) = -f(x)$, maka grafik simetri terhadap titik asal/origin. Fungsi yang demikian disebut **fungsi ganjil.** Sebagai contoh: $g(x) = x^3 - 2x$.

Perhatikan fungsi, $h(x) = \dfrac{2}{(x-1)}$. Fungsi ini tidak genap maupun ganjil (mengapa?).

Fungsi Modulus

Fungsi modulus adalah suatu fungsi M yang memuat bentuk nilai mutlak dan dinyatakan dengan rumus $M(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, \ x < 0 \end{cases}$.

(***sudah di bahas pada bagian: 3 bab ini***)

Fungsi Linear

Fungsi linear adalah suatu fungsi f yang dinyatakan dengan rumus $f(x) = ax + b$, dimana a dan b suatu konstanta dengan $a \neq 0$
.

Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi f yang berbentuk

$f(x) = y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Nilai x yang menyebabkan y maksimum/minimum $x_p = -\dfrac{b}{2a}$.

Nilai y maksimum/minimum $y_{\min/\max} = a(x_p)^2 + b(x_p) + c$ atau

$$y_{\min/\max} = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

$$\begin{cases} a > 0, & y \text{ minimal} \\ a < 0, & y \text{ maksimal} \end{cases}$$

Fungsi Bilangan Bulat Terbesar (Floor)

Fungsi floor disebut juga fungsi pembulatan ke bawah, yakni dengan mengambil bagian bulatnya. Untuk sebarang bilangan real x, nilai fungsi floor dari x ditulis dengan $\lfloor x \rfloor$.

Definisi: Misalkan x adalah sebarang bilangan real. Nila fungsi floor x kita tulis dengan $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.
Sebagai contoh:
$\lfloor 3{,}14 \rfloor = 3, \lfloor -2{,}5 \rfloor = -3, \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1, \lfloor 4 \rfloor = 4$.

(*untuk uraian lebih lanjut akan di bahas pada bab "Teori Bilangan"*)

Fungsi Bilangan Bulat Terkecil (Ceiling)

Fungsi ceiling disebut juga fungsi pembulatan ke atas. Untuk sebarang bilangan real x, nilai fungsi ceiling dari x kita tulis dengan $\lceil x \rceil$.

Definisi: Misalkan x adalah sebarang bilangan real. Nila fungsi ceiling x kita tulis dengan $\lceil x \rceil$ merupakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x.
Sebagai contoh:
$\lceil 3{,}14 \rceil = 4, \lceil -2{,}5 \rceil = -2, \lceil \sqrt{2} \rceil = 2$.

(*untuk uraian lebih lanjut akan di bahas pada bab "Teori Bilangan"*)

5.4. Sifat-Sifat Fungsi

- ✓ Fungsi Onto (Surjektif)
  Misalkan f fungsi dengan domain $D_f \subseteq A$ dan range $R_f \subseteq B$ atau dapat kita tulis sebagai $(f : A \to B)$. Kita sebut f surjektif atau f pemetaan onto B, jika dan hanya jika $R_f = B$.

  Berdasarkan definisi di atas, fungsi $f(x) = x^2$ merupakan fungsi surjektif dari $\Re$ onto $\{x \in \Re : x \geq 0\}$ tetapi tidak surjektif jika $f : \Re \to \Re$.

- ✓ Fungsi Satu-Satu (Injektif)
  Misalkan f suatu fungsi dengan domain D_f di A dan range R_f di B. Kita sebut f injektif/satu-satu jika dan hanya jika $f(a) = b$ dan $f(a^c) = b$ berakibat $a = a^c$. Atau dengan kata lain, f injektif jika dan hanya jika ketika a, a^c element di D_f dan $a \neq a^c$, maka $f(a) \neq f(a^c)$.

  Berdasarkan definisi di atas, Misal F fungsi dengan $F : \Re \to \Re$, dimana

$F(x) = x^2$. Jelas bahwa F bukan merupakan fungsi satu-satu, karena ada pasangan F(2)=F(-2)=4, tetapi $2 \neq -2$. Jika fungsi $F_1(x) = x^2$, didefinisikan dengan domain: $F_1 : \{x \in \Re : x \geq 0\} \to \Re$, jelas bahwa F_1 satu-satu.

- ✓ Fungsi Korespondensi Satu-satu (Bijektif)
  Suatu fungsi f, dimana $f : A \to B$ disebut bijektif jika dan hanya jika fungsi f surjektif dan injektif.

5.5. Persamaan Fungsional

Persamaan fungsional adalah persamaan untuk fungsi yang belum diketahui (*unknown functions)* sebagai ganti bilangan-bilangan yang belum diketahui. Dalam bagian ini, kita akan mencoba mengeksplorasi bagaimana kita dapat menenukan "the unknown function" ketika kondisi-kondisi tertentu sudah diketahui.

Functional equations in one variable

Contoh 1:

Jika $f(x+7) = x^2 + 5x + 2$, tentukan $f(x)$.

Pembahasan:

Misal $t = x + 7$, maka $x = t - 7$. Substitusi bentuk tersebut ke kondisi yang diketahui, kita peroleh:

$$f(t) = (t-7)^2 + 5(t-7) + 2 = t^2 - 9t + 16. \text{ Jadi, } f(x) = x^2 - 9x + 16.$$

Contoh 2:

[AHSME 1998] Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi: (i) untuk setiap bilangan real x dan y maka $f(x+y) = x + f(y)$ dan (ii) $f(0) = 2$. Nilai dari $f(1998)$ adalah ....

Pembahasan:

Jika y = 0, maka kita peroleh:

$$f(x) = x + f(0) \Leftrightarrow f(x) = x + 2$$

Jadi, $f(1998) = 2000$.

Contoh 3:

Jika $f(\ln x) = x^2 + x + 1$, dimana $x > 0$, tentukan $f(x)$.

Pembahasan:

Misal $t = \ln x$, maka $x = e^t$. Substitusi bentuk tersebut ke kondisi yang diketahui, kita peroleh:

$$f(t) = \left(e^t\right)^2 + e^t + 1.$$

Jadi, $f(x) = e^{2x} + e^x + 1$.

Contoh 4:

Jika $f(x)$ adalah fungsi yang tidak terdefinisi untuk x = 0 dengan

$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Tentukan $f(x)$.

Pembahasan:

$f(x)+2\,f\left(\frac{1}{x}\right)=3x$ .... (1). Jika $y=\frac{1}{x}$ maka

$f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)=\frac{3}{y}$, sehingga $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}\Leftrightarrow 2\,f\left(\frac{1}{x}\right)+4f(x)=\frac{6}{x}$ ....(2)

Kurangkan persamaan (2) dengan (1) kita peroleh:

$$3f(x)=\frac{6}{x}-3x$$

Jadi, $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x}$

Persamaan Fungsional dengan lebih dari satu variabel

Contoh 5:

Jika $f:Q\to Q$ memenuhi: (i) $f(1)=2$ dan (ii) Untuk semua $x,y\in Q$, $f(xy)=f(x)\,f(y)-f(x+y)+1$, tentukan $f(x)$.

Pembahasan:

Misalkan $y=1$, maka

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)\,f(1)-f(x+1)+1 \\ &= 2f(x)-f(x+1)+1 \\ f(x+1) &= f(x)+1. \end{aligned}$$

Jadi, gunakan kondisi (i) dan induksi matematika, untuk setiap x bilangan bulat, kita memiliki: $f(x)=x+1$.

Untuk sebarang bilangan rasional, misalkan $x=\frac{m}{n}$ dimana m, n bilangan bulat dan n tidak sama dengan nol. Susbtitusikan $x=\frac{m}{n}, y=n$ ke kondisi (ii), maka

$f(m)=f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1)-f\left(\frac{m}{n}+n\right)+1.$

Karena $f(x+1)=f(x)+1$ untuk $\forall x\in Q$, Kita peroleh: $f\left(\frac{m}{n}+n\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+n.$

Substitusikan bentuk ini ke persamaan pada soal, kita peroleh

$m+1=f\left(\frac{m}{n}\right)(n+1)-f\left(\frac{m}{n}\right)-n+1$. Jadi, $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}+1$ Sehingga kita peroleh fungsi, $f(x)=x+1,\ \forall x\in Q$.

Contoh 6:

Jika $(x-y)\,f(x+y)-(x+y)\,f(x-y)=4xy\left(x^2-y^2\right)$ untuk semua x, y, tentukan $f(x)$.

Pembahasan:

The given condition is equivalent to

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$$

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-(x+y)^2=\frac{f(x-y)}{x-y}-(x-y)^2 \text{ untuk semua x, y.}$$

Jadi, $\frac{f(x)}{x}-x^2$ adalah konstan. Misal $\frac{f(x)}{x}-x^2=k$, maka $f(x)=x^3+kx$.

LATIHAN 5.5

1. (OSK, SMP/2013) Jika f adalah fungsi linier, $f(1) = 2000$, dan $f(x+1) + 12 = f(x)$, maka nilai $f(100) = \cdots$
2. (OSK, Tipe 3/2011) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi $f(xy) = \dfrac{f(x)}{y}$ untuk semua bilangan real positif x dan y. Jika $f(100) = 3$ maka $f(10)$ adalah ...
3. (OSK 2009) Diberikan fungsi $f : \Re \to \Re$ sedemikian sehingga $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ untuk semua $x \in \Re$. Nilai dari $f(2009)$ adalah ...
4. (OSK 2009) Diketahui A adalah himpunan semua bilangan asli yang habis dibagi 3, tidak habis dibagi 5, dan tidak lebih dari 100. Banyaknya fungsi f dari himpunan semua bilangan real yang tidak nol ke dalam A yang memenuhi $f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x-y)$ adalah ...
5. (OSP 2009) Suatu fungsi $f : \mathrm{Z} \to Q$ mempunyai sifat $f(x+1) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap $x \in \mathrm{Z}$. Jika $f(2) = 2$, maka nilai fungsi $f(2009)$ adalah ...
6. (OSK 2008) Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$, $f(-x) = \ldots$
7. (OSK 2006) Jika $f(xy) = f(x+y)$ dan $f(7) = 7$, maka $f(49) = \ldots$
8. (OSP 2004) Misalkan f sebuah fungsi yang memenuhi $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$, untuk setiap bilangan bulat x dan y. Berapakah nilai f(2004)?
9. (OSK 2003) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f(-x) = 2x$ untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Berapakah nilai f(2)?
10. (AMC 12/2001) Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi $f(xy) = \dfrac{f(x)}{y}$ untuk semua bilangan real positif x dan y. Jika $f(500) = 3$ maka $f(600)$ adalah
11. (AMC 12A/2004) Misal f fungsi yang memenuhi sifat $\begin{cases} f(1) = 1, \\ f(2n) = n.f(n), \text{untuk sebarang bilangan bulat positif } n. \end{cases}$ Berapa nilai dari $f\left(2^{100}\right)$?
12. (AMC 12B/2007) Suatu fungsi f memiliki sifat $f(3x-1) = x^2 + x + 1$ untuk semua bilangan real x. Berapa f(5)?
13. (AHSME 1995) Misal f fungsi linear dengan sifat bahwa $f(1) \leq f(2), f(3) \geq f(4)$, dan $f(5) = 5$. Berapa nilai f(0)?
14. (AHSME 1998) Misalkan fungsi f(x) memenuhi sifat bahwa untuk sebarang dua bilangan real x dan y, $f(x+y) = x + f(y)$. Jika $f(0) = 2$, tentukan nilai f(1998)?
15. (AMC 12/2000) Misal f suatu fungsi sehingga $f\left(\dfrac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$. Tentukan jumlah semua nilai z sehingga $f(3z) = 7$.
16. (AHSME ke-50) Fungsi f memenuhi persamaan fungsional $f(x) + f(y) = f(x+y) - xy - 1$ untuk setiap pasangan x dan y bilangan real. Jika $f(1) = 1$, banyaknya bilangan bulat $n \neq 1$ sehingga $f(n) = n$ adalah ...

17. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1996) Misal suatu fungsi f didefinisikan bahwa $f\left(x+y^2\right)=f(x)+2[f(y)]^2$ & $f(1)\neq 0$. Tentukan nilai dari f(1996)?
18. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1996) Untuk semua bilangan bulat x, fungsi f(x) memenuhi $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap $x\in \mathbb{Z}$. Jika $f(1)=2$, maka nilai fungsi $f(1996)$ adalah ...
19. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1995) Fungsi f memenuhi $f(x)+f(y)=f(x+y)-xy-1$ untuk setiap bilangan real x,y. Jika $f(1)=1$, tentukan negatif bilangan bulat n sehingga $f(n)=n$.
20. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1991) Suatu fungsi f, dinotasikan untuk semua pasangan terurut dari bilangan bulat positif, memenuhi sifat-sifat berikut: $f(x,x)=x+2, f(x,y)=f(y,x)$ dan $(x+y).f(x,y)=y.f(x,x+y)$. Hitung $f(9,7)$.
21. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1989) Suatu fungsi f didefinisikan untuk bilangan bulat non-negatif n dan k oleh $f(0,n)=n+1$, $f(k,0)=f(k-1,1)$, dan $f(k+1,n+1)=f(k,f(k+1,n))$. Tentukan f(2, 2).
22. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1988) Untuk sebarang bilangan bulat n, $f(n)$ didefinisikan oleh $f(n)=\begin{cases} n-3, & n\geq 2000 \\ f(f(n+5)), & n<2000 \end{cases}$. (i) Tentukan f(1988) (ii) Tentukan semua bilangan bulat positif n sehingga f(n)=1997.
23. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1988) Fungsi f(x) didefinisikan untuk semua bilangan real x. Jika $f(a+b)=f(ab)$ untuk semua a, b dan $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, hitung $f(1988)$.
24. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 1988) Jika $f(x)f(y)-f(xy)=x+y$ untuk semua bilangan real x dan y, tentukan f(x).
25. (OSK, 2012/Tipe 1) Tentukan nilai b sehingga untuk semua x paling tidak salah satu dari $f(x)=x^2+2012x+b$ atau $g(x)=x^2-2012x+b$ positif
26. (OSK, 2012/Tipe 2) Diketahui f adalah fungsi kuadrat dengan $f(1)=8$ dan $f(8)=1$. Nilai dari $f(0)-f(1)+f(2)-f(3)+f(4)-f(5)+f(6)-f(7)+f(8)-f(9)$ adalah ...

.

5.6. Fungsi Komposisi

Dua fungsi f dan g dapat dikomposisikan dengan suatu "*aturan tertentu*" yang disebut dengan "*komposisi suatu fungsi*". Fungsi komposisi g dilanjutkan dengan f dapat dinotasikan sebagai $(f\circ g)(x)=f(g(x))$.

Contoh 1:

Jika f dan g dinyatakan dengan rumus $f(x)=x^2$ dan $g(x)=x+1$. Tentukan rumus untuk $f\circ g(x)$ & $g\circ f(x)$.

Pembahasan:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$ dan

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(x^2\right)=x^2+1$.

Sifat-Sifat Komposisi Fungsi

- ✓ Tidak bersifat komutatif : $(f\circ g)(x)\neq(g\circ f)(x)$
- ✓ Bersifat asosiatif : $f\circ(g\circ h)(x)=(f\circ g)\circ h(x)$

✓ Terdapat unsur Identitas : $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$

Syarat Komposisi Dua Fungsi

Jika terdapat fungsi f dan g maka terdapat fungsi komposisi $g \circ f$ dengan sayarat $R_f \cap D_g \neq \phi$.

Contoh 2:

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 5$ dan $g(x) = \sqrt{3x+4}$, Berapa nilai dari $(f \circ g)(5)$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $g(5) = \sqrt{3.5+4} = \sqrt{19}$, dan $f\left(\sqrt{19}\right) = 24$

Jadi, $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f\left(\sqrt{19}\right) = 24$.

Contoh 3:

Tentukan $f(x)$ jika $g(x) = 2x+1$ dan $(g \circ f)(x) = 6x+7$.

Pembahasan:

Alternatif 1

Jika g fungsi linear dan hasil komposisinya linear maka f juga linear. Misal $f(x) = ax+b$

$(g \circ f)(x) = 6x+7$

$g(f(x)) = 6x+7$

$g(ax+b) = 6x+7$

$2ax+2b+1 = 6x+7$

Dari persamaan terakhir, maka kita peroleh bahwa $a = 3$ & $b = 3$

Jadi, $f(x) = 3x+3$

Alternatif 2

$(g \circ f)(x) = 6x+7$

$g(f(x)) = 6x+7$

$2f(x)+1 = 6x+7$

Jadi, $f(x) = 3x+3$

Contoh 4:

Diketahui $(g \circ f)(x) = 2x^2+5x-5$ dan $f(x) = x-1$. Maka $g(x) = \ldots$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $(g \circ f)(x) = 2x^2+5x-5$

$g(f(x)) = 2x^2+5x-5$

$g(x-1) = 2x^2+5x-5$

Alternatif 1

$g(x-1) = 2(x-1)^2+4x-2+5x-5$

$g(x-1) = 2(x-1)^2+9x-7$

$g(x-1) = 2(x-1)^2+9(x-1)+9-7 = 2(x-1)^2+9(x-1)+2$

Maka $g(x) = 2x^2+9x+2$

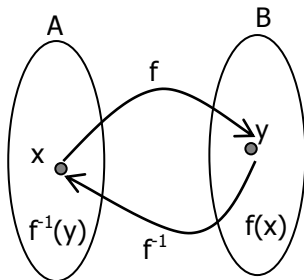
Alternatif 2

Misal $y = x-1$ maka $x = y+1$

$g(y) = 2(y+1)^2 + 5(y+1) - 5 = 2y^2 + 9y + 2$

Jadi, $g(x) = 2x^2 + 9x + 2$

5.7. Fungsi Invers

Diagram pemetaan fungsi invers

Definisi

Sebuah fungsi $f : A \to B$ disebut mempunyai fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif/Korespondensi satu-satu.

Teorema Fungsi Invers

- ✓ $(g \circ f)^{-1}(x) = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x)$
- ✓ $\left(g^{-1}\right)^{-1}(x) = g(x)$

Contoh 1:

Tentukan invers dari fungsi $y = g(x) = 2x + 1$.

Pembahasan:

$y = 2x + 1$

$x = \frac{y-1}{2}$

Jadi, fungsi inversnya adalah $g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$.

Contoh 2:

Tentukan invers dari fungsi $g(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

Pembahasan:

$y = \frac{2x+1}{x+3}$

$yx - 2x = 1 - 3y$

$x(y-2) = -3y + 1$

$x = \frac{-3y+1}{y-2}$

Jadi, fungsi inversnya adalah $g^{-1}(x) = \frac{-3x+1}{x-2}$.

Contoh 3:

Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = 3x - 4$, Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$.

Pembahasan:

Alternatif 1

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-4) = 2(3x-4) + 1 = 6x - 7$.

Sehingga, $y = 6x - 7 \rightarrow x = \dfrac{y+7}{6}$

Jadi, $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{6}$

Alternatif 2

$f(x) = 2x + 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

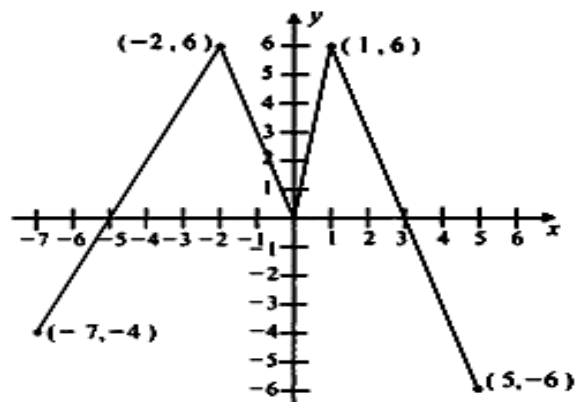
$g(x) = 3x - 4 \rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{3}$

$(f \circ g)^{-1}(x) = \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x) = g^{-1}\left(f^{-1}\right)(x)$

$$= g^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{\frac{x-1}{2} + 4}{3} = \frac{x+7}{6}.$$

Jadi, $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x+7}{6}$.

LATIHAN 5.6 & 5.7

1. (OSK, 2013) Jika fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = \frac{kx}{2x+3}$, $x \neq -\frac{3}{2}$, k konstanta, memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap bilangan real x, kecuali $x = -\frac{3}{2}$, maka nilai k adalah ...
2. (OSP, 2013) Diberikan fungsi real f dengan $f(x) = \frac{cx}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$ dan $f(f(x)) = x$ untuk semua $x \neq \frac{3}{2}$. Nilai $f(2013)$adalah ...
3. (OSK 2007) Misalkan $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Jika $f(g(x)) = 3$, maka x=...
4. (AHSME, 1980) Jika fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \dfrac{cx}{2x+3}$, $x \neq -3/2$, c suatu konstanta, dan memenuhi persamaan $f(f(x)) = x$ untuk semua bilangan real x kecuali $x = -3/2$, maka nilai c sama dengan ...
5. (AMC 12A/2002) Grafik fungsi f ditunjukkan di bawah ini. Berapa banyak solusi dari persamaan $f(f(x)) = 6$?

6. (AMC 12B/2004) Jika $f(x) = ax + b$ dan $f^{-1}(x) = bx + a$ dengan a dan b bilangan real, berapa nilai dari a+b?
7. (AMC 12A/2005) Untuk masing-masing x dalam interval $[0,\ 1]$, didefinisikan

$f(x)=\begin{cases} 2x, & jika\ 0\le x\le 1/2 \\ 2-2x & jika\ 1/2<x\le 1 \end{cases}$. Misalkan $f^2(x)=f(f(x))$ dan $f^{n+1}(x)=f^n(f(x))$ untuk bilangan bulat $n\ge 2$. Berapa banyak nilai x dalam interval $[0,\ 1]$ sedemikian sehingga $f^{2005}(x)=\frac{1}{2}$?

8. (AMC 12B/2007) Suatu fungsi f memiliki sifat bahwa $f(3x-1)=x^2+x+1$ untuk semua bilangan real x. Berapa nilai f(5)?
9. (NYIML, Spring/1977) Misal f dan g suatu fungsi dimana $f(x)=9x+1$ dan $g(x)=x^2$. Tentukan semua nilai x sehingga $f(g(x))=g(f(x))$.
10. (NYIML, Fall/1980) Jika $P(x+3)=x^2+7x+4$ dan $P(x)=ax^2+bx+c$, tentukan pasangan tripel dari (a,b,c).
11. (NYIML, Fall/1984) Untuk semua bilangan real tidak nol, $f(x)=1-\frac{1}{x}$ dan $g(x)=1-x$. Jika $h(x)=f(g(x))$, tentukan nilai x sehingga $h(x)=8$.
12. (Seleksi Awal IMO Hongkong,1995/AHSME, 1971) Misalkan $f_1(x)=\frac{2x-1}{x+1}$. Didefinisikan bahwa untuk k =1,2,3,..., $f_{k+1}(x)=f_1(f_k(x))$ dan $f_{35}(x)=f_5(x)$, tentukan nilai dari $f_{28}(\sqrt{2})$.
13. (Seleksi Awal IMO Hongkong,2007) Untuk $0\le x\le 1$ dan bilangan nulat positif n, misal $f_o(x)=|1-2x|$ dan $f_n(x)=f_o(f_{n-1}(x))$. Berapa banyak solusi yang ada dari persamaan $f_{10}(x)=x$ dimana $0\le x\le 1$?
14. (AHSME, 1996) Fungsi f, dimana $f:Z\to Z$ didefinisikan sebagai berikut $f(n)=\begin{cases} n+3, & jikan\ ganjil \\ \frac{n}{2}, & jikan n\ genap \end{cases}$. Andaikan k ganjil dan $f(f(f(k)))=27$. Tentukan jumlah digit-digit dari k.
15. (AHSME, 1974) Jika $g(x)=1-x^2$ dan $f(g(x))=\frac{1-x^2}{x^2}$, $x\ne 0$, maka nilai dari $f\left(\frac{1}{2}\right)=...$

6. Persamaan & Sistem Persamaan

Persamaan

I. **Persamaan Lingkaran**

> Definisi:
> Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu

Dari definisi di atas, yang dimaksud dengan titik tetap adalah ***pusat lingkaran***, dan jaraknya disebut ***jari-jari lingkaran***. Ruas garis yang panjangnya 2r dan melalui titik pusat disebut diameter lingkaran.

Ada dua hal penting untuk menemukan persamaan lingkaran (dalam aljabar), yakni harus ada pusat dan jari-jari lingkaran.

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan jari-jari r:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Persamaan lingkaran yang berpusat (0,0) dan jari-jari r:
$x^2+y^2=r^2$

Persamaan lingkaran dalam bentuk standart:
$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

- Pusat $\left(-\frac{1}{2}A,\ -\frac{1}{2}B\right)$
- Jari-jari = $\sqrt{\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}B^2-C}$

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan menyinggung sumbu X:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dimana $r=|k|$

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan menyinggung sumbu Y:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dimana $r=|h|$

Persamaan lingkaran yang berpusat (h,k) dan menyinggung sumbu X dan Y:
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dimana $r=|h|=|k|$, atau dengan kata lain bahwa $h=k$

Dua rumus yang sering digunakan dalam mencari persamaan lingkaran:

- Jarak diantara dua titik dan Titik tengah. Konsep ini digunakan jika diketahui titik-titik ujung diameter lingkaran.
  Diketahui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, maka:
  Jarak $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
  Titik tengah antara A dan B = $\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ \frac{1}{2}(y_1+y_2)\right)$
- Jarak titik ke garis lurus. Konsep ini digunakan jika diketahui pusat lingkaran dan garis singgung lingkaran.
  Diketahui titik $A(x_1, y_1)$ dan garis $g \equiv ax+by+c=0$, maka jarak titik A ke garis g adalah

$$d=\left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

Contoh 1:
Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya O(0,0) dan
(a). berjari-jari 4 (b) melalui titik P(3, -5)
Pembahasan:
a. Lingkaran dengan pusat O(0,0) dan berjari-jari 4 mempunyai persamaan
$$x^2 + y^2 = 16$$
b. Pusat lingkaran O(0,0). Karena lingkaran melalui P, maka jari-jari lingkaran adalah jarak titik O ke titik P. Jarak $OP = \sqrt{(3-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{34}$. Jadi persamaan lingkaran yang diminta adalah
$$x^2 + y^2 = 34.$$
Contoh 2:
Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $P(-3, 5)$dan
(a). berjari-jari 5 (b) melalui titik (2, 3) (c) menyinggung sumbu-y
Pembahasan:
a. Persamaan lingkaran dengan pusat $P(-3, 5)$ dan berjari-jari 5 adalah
$$(x-(-3))^2 + (y-5)^2 = 5^2$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-5)^2 = 25$$
b. Lingkaran dengan pusat P(-3,5) dan melalui titik (2,3) mempunyai jari-jari
$$\sqrt{(2-(-3))^2 + (3-5)^2} = \sqrt{29}$$
Persamaan lingkaran itu:
$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 29$$
c. Lingkaran dengan pusat P(-3,5) dan menyinggung sumbu-y, jari-jarinya adalah jarak P(-3,5) dengan sumbu-y, yaitu $|-3| = 3$. Jadi persamaannya adalah
$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 9.$$

Contoh 3:
Tentukan koordinat pusat dan panjang jari-jari lingkaran apabila diketahui persamaan:
a. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
b. $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$
Pembahasan:
a. Dari $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$, maka kita peroleh: $A = -2, B = -6, C = -15$
$-\frac{1}{2}A = 1$ dan $-\frac{1}{2}B = 3$, Sehingga $P(1,\ 3)$
Jari-jari = $\sqrt{1+9+15} = 5$
b. Dari $2x^2 + 2y^2 - 4x + 3y = 0$, maka kita bagi kedua ruas dengan 2:
$x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{2}y = 0$. Sehingga kita peroleh $A = -2, B = \frac{3}{2}, C = 0$
$-\frac{1}{2}A = 1$ & $-\frac{1}{2}B = -\frac{3}{4}$, Maka $P\left(1,\ -\frac{3}{4}\right)$
Jari-jari = $\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$

Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Misalkan suatu lingkaran pusat (h,k) dan jari-jari r, yakni $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ dan sebuah titik $A(x_1,y_1)$, Maka titik A akan mempunyai tiga kemungkinan kedudukan terhadap lingkaran:

- ✓ Jika $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2>r^2$, maka A terletak di luar lingkaran
- ✓ Jika $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2=r^2$, maka A terletak pada lingkaran
- ✓ Jika $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2<r^2$, maka A terletak di dalam lingkaran

Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Misalkan diketahui suatu garis $g: y=mx+c$ dan lingkaran $L:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, Maka untuk menentukan kedudukan garis g terhadap lingkaran L ikuti langkah-langkah berikut:

- ✓ Substitusikan persamaan garis g ke persamaan lingkaran L, sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam variabel x, yakni $ax^2+bx+c=0$
- ✓ Tentukan nilai a, b, dan c, kemudian hitunglah nilai diskriminannya $(D=b^2-4ac)$
- ✓ Bandingkan nilai D hasil perhitungan dengan nol.
  - Jika $D>0$, maka garis g memotong di dua titik pada lingkaran L
  - Jika $D=0$, maka garis g memotong di satu titik pada lingkaran L/menyinggung
  - Jika $D<0$, maka garis g tidak memotong lingkaran L

Contoh 4:

Diketahui garis $y=mx$ dan lingkaran $x^2+y^2=10x-16$. Tentukan nilai m sehingga garis tersebut bersinggungan dengan lingkaran.

Pembahasan:

Substitusikan persamaan garis ke dalam persamaan lingkaran, kita peroleh bentuk persamaan kuadrat dalam x:

$$(1+m^2)x^2-10x+16=0.$$

Diskriminan, $D=100-64(1+m^2)=36-64m^2=4(3-4m)(3+4m)$

Agar garis bersinggungan dengan lingkaran maka haruslah D = 0, yakni ketika $m=-3/4$ atau $m=3/4$

Contoh 5:

Tentukan kedudukan titik A(-6, 8) terhadap lingkaran:

a. $x^2+y^2=100$

b. $x^2+y^2+6x-8y+25=0$

c. $(x+1)^2+(y-2)^2=64$

Pembahasan:

a. A(-6,8) disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2+y^2=100$ maka diperoleh:
$(-6)^2+8^2=36+64=100$.
Jadi, titik A terletak pada lingkaran.

b. A(-6,8) disubstitusikan ke persamaan lingkaran $x^2+y^2+6x-8y+25=0$ maka diperoleh:
$(-6)^2+8^2+6(-6)-8.8+25=36+64-36-64+25=25>0$.

Jadi, titik A terletak di luar lingkaran.

c. A(-6,8) disubstitusikan ke persamaan lingkaran $(x+1)^2+(y-2)^2=64$ maka diperoleh:

$(-6+1)^2+(8-2)^2=25+36=61<64$.

Jadi, titik A terletak di dalam lingkaran.

Contoh 6:

Tentukan kedudukan garis $g: y=x+1$ terhadap lingkaran $L: x^2+y^2=25$.

Pembahasan:

Substitusikan persamaan garis g ke persamaan lingkaran L, maka kita peroleh:

$x^2+(x+1)^2=25$

$\Leftrightarrow 2x^2+2x-24=0$

$\Leftrightarrow x^2+x-12=0$

$D=49>0$

Jadi, garis g memotong lingkaran di dua titik.

Persamaan Garis Singgung Lingkaran

✓ Persamaan Garis Singgung melalui titik pada lingkaran

Jika titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, maka persamaan garis singgung yang melalui titik A adalah

$$(x_1-h)(x-h)+(y_1-k)(y-k)=r^2$$

Jika titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2+y^2=r^2$, maka persamaan garis singgung yang melalui titik A adalah

$$x_1x+y_1y=r^2$$

Jika titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka persamaan garis singgung yang melalui titik A adalah

$$x_1x+y_1y+\left(\frac{1}{2}Ax_1+\frac{1}{2}Ax\right)+\left(\frac{1}{2}By_1+\frac{1}{2}By\right)+C=0$$

✓ Persamaan Garis Singgung yang Bergradien tertentu

Jika persamaan lingkaran $L:(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang bergradien m adalah

$$y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{m^2+1}$$

Jika persamaan lingkaran $L: x^2+y^2=r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang bergradien m adalah

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

Jika persamaan lingkaran $L: x^2+y^2+Ax+By+C=0$, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang bergradien m adalah

- ✓ Cari dahulu Pusat(h,k) dan jari-jari(r), Kemudian gunakan rumus di bawah ini:
- ✓ $y-k=m(x-h)\pm r\sqrt{m^2+1}$

Contoh 7:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ melalui titik $A(4,-3)$

Pembahasan:

- Check kedudukan titik A terhadap lingkaran L

  $4^2+(-3)^2=25$

  Jadi, titik A terletak pada lingkaran
- Karena A terletak pada lingkaran L, maka persamaan garis singgung lingkaran L yang memalui A adalah:

  $x_1x+y_1y=25$

  $\Leftrightarrow\ 4x-3y=25$

Contoh 8:

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ yang sejajar garis $3x-4y=2$

Pembahasan:

Misalkan persamaan garis singgung = g dan garis $3x-4y=2$ adalah k, maka $m_g=m_k=\frac{3}{4}$.

Dari $x^2+y^2-4x-6y-3=0$, maka kita peroleh

$P(2,3)$ dan $r=\sqrt{4+9+3}=4$

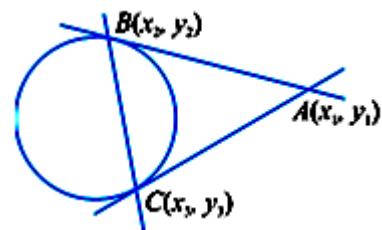
Sehingga, persamaan garis singgungnya:

$$g\equiv y-3=\frac{3}{4}(x-2)\pm 4\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}$$

$$4y-12=3x-6\pm 16\,\frac{5}{4}$$

$$4y=3x+6\pm 20$$

✓ Persamaan Garis Singgung melalui titik di luar lingkaran

Jika melalui titik $A(x_1,y_1)$ di luar lingkaran $L: x^2+y^2=r^2$ dibuat dua buah garis singgung pada lingkaran dengan titik singgungnya $B(x_2,y_2)\ \&\ C(x_3,y_3)$, maka persamaan garis yang melalui B dan C adalah $x_1x+y_1y=r^2$ disebut ***garis polar***

(gp) pada lingkaran L dan titik $A(x_1, y_1)$ disebut ***titik polar (tp)***.

Untuk mencari persamaan garis singgung yang melalui titik di luar lingkaran dapat ditentukan dengan langkah-langkah berikut:

- Mencari garis polar dari titik A terhadap lingkaran L
- Mencari titik potong gp dan lingkaran L
- Membuat persamaan garis singgung yang melalui titik potong tersebut.

LATIHAN 6A.I

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat O dan melalui titik (7,-2)
2. Tentukan pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran (i) $4x^2 + 4y^2 = 25$
   (ii) $x^2 + y^2 = 18$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat sama (kosentrik) dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ tetapi jari-jarinya tiga kali lebih panjang.
4. Tentukan m agar titik (m, -2) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$
5. Misalkan titik A(1,0) dan B(9,0). Tentukan tempat kedudukan dari semua titik P(x,y) sehingga PB=3 PA.

LATIHAN 6B.I

1. (AMC, 12A/2002/18) Misalkan C_1 & C_2 lingkaran dengan persamaan berturut-turut $(x-10)^2 + y^2 = 36$ dan $(x+15)^2 + y^2 = 81$. Berapa panjang dari ruas garis terpendek $\overline{PQ}$ yang menyinggung lingkaran C_1 di P dan lingkaran C_2 di Q?
2. (OSK, 2011/Tipe 1) Luas daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 21^2$ tetapi di luar lingkaran $x^2 + (y-7)^2 = 14^2$ dan $x^2 + (y+7)^2 = 14^2$ adalah ...
3. (AHSME, 1996/25/AMC8) Diketahui bahwa $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, berapa kemungkinan nilai terbesar dari $3x + 4y$?
4. (AHSME, 1996/20/AMC8) Dalam bidang koordinat xy, berapa rute terpendek dari titik (0,0) ke (12,6) yang tidak melewati daerah di dalam lingkaran $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$?
5. (AHSME, 1978/10/Book IV) Jika B adalah titik pada lingkaran C yang pusatnya P, maka himpunan semua titik A pada bidang lingkaran C sedemikian sehingga jarak antara A dan B kurang dari atau sama dengan jarak antara A dan sebarang titik selain titik pada lingkaran C adalah ....
   A. Ruas garis dari P ke B
   B. Sinar garis yang dimulai di P dan melewati B
   C. Sinar garis yang dimulai di B
   D. Lingkaran yang pusatnya di P
   E. Lingkaran yang pusatnya di B
6. (AHSME, 1978/10/Book IV) Jika r bilangan positif dan garis yang persamaannya $x + y = r$ adalah garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r$, maka r sama dengan ....
7. (AHSME, 1965/13/Book II) Misalkan n adalah banyaknya pasangan bilangan (x,y) yang memenuhi persamaan $5y - 3x = 15$ dan $x^2 + y^2 \leq 16$. Maka n sama dengan ....

8. (NYCIML, Fall 1975/3) Tentukan semua pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi $x^2 + y^2 \le 25$ dan $y = x - 3$.
9. (NYCIML, Spring 1980/15) Ada dua lingkaran yang mempunyai pusat pada sumbu X, melalui titik asal (0,0), dan menyinggung lingkaran $(x-7)^2 + (y-6)^2 = 25$. Tentukan jari-jari dari lingkaran yang terkecil dari keduanya.
10. (NYCIML, Fall 1981/12) Luas daerah persekutuan lingkaran $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$ dan $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 25$ dibagi menjadi dua bagian yang sama oleh garis $14x + 3y = k$. Tentukan nilai k.
11. (10th, Pui Chin Invitational Mathematics Competition/Senior Secondary /10) Sebuah lingkaran mempunyai persamaan $kx(2x + y) - 4y(5x - hy) = 2011$, dimana k dan h suatu konstanta. Tentukan nilai dari k+h.
12. (9th, Pui Chin Invitational Mathematics Competition/Senior Secondary /8) Find the radius of the circle $x^2 + y^2 + 12x + 34y - 2010 = 0$ correct to nearest integer.
13. (5th, Pui Chin Invitational Mathematics Competition/Senior Secondary /8) Diketahui suatu persamaan lingkaran adalah $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, dimana A, B, C adalah bilangan bulat positif berurutan dengan A<B<C. Tentukan kemungkinan nilai terkecil C.

II. Persamaan Kuadrat (PK)

Bentuk Umum PK

Persamaan kuadrat dalam variabel x, dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan $a, b, c \in \Re$ & $a \neq 0$ dimana a merupakan koefisien x^2, b meruapakan koefisien x, dan c konstanta.

Cara Menyelesaikan PK

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat dengan bentuk $ax^2 + bx + c = 0$ dapat dengan cara mengganti variabel x dengan suatu bilangan real sehingga kalimat terbuka tersebut bernilai benar. Nilai pengganti x yang memenuhi PK $ax^2 + bx + c = 0$ disebut *penyelesaian atau akar dari PK.*

Untuk mencari akar-akar dari suatu PK ada beberapa cara. Dan kalian semua telah mempelajarinya pada saat SMP. Cara tersebut diantaranya:

- *Memfaktorkan*
- *Melengkapkan kuadrat sempurna*
- *Menggunakan rumus kuadrat* $\left(x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$
- *Menggambarkan sketsa grafik fungsi* $f : ax^2 + bx + c = 0$

Contoh:

(OSK 2002) Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a + 10b}{b + 10a} = 2$. Tentukan nilai $\dfrac{a}{b}$.

Pembahasan:

$$\frac{a}{b}+\frac{a+10b}{b+10a}=2 \rightarrow \frac{a}{b}+\frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}}=2$$

Misal $\frac{a}{b}=x$, maka $\frac{x+10}{1+10x}=2-x \rightarrow x+10=2-10x^2+19x$

$5x^2-9x-4=0 \rightarrow (5x-4)(x-1)=0 \rightarrow x=1$ atau $x=\frac{4}{5}$

$\therefore$ Karena $a \neq b$, maka $x \neq 1$ maka $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$

Untuk lebih jelasnya silahkan direview kembali materi yang ada dibuku SMP Kalian.

Hubungan Jenis-Jenis Akar PK dengan nilai Diskriminan

Sebelum kita mengulas tentang hubungan jenis-jenis akar dari PK, kita kenalkan dahulu arti dari Diskriminan PK.

Diskriminan dari suatu PK merupakan suatu yang membedakan jenis akar suatu PK. Dan disimbolkan dengan D. Adapun rumus untuk diskriminan PK adalah:

$$D=b^2-4ac$$

Berikut ini hubungan jenis-jenis akar Pk dengan nilai D:

- Jika D>0, maka PK mempunyai *dua akar real yang berlainan.*
  - Jika D berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya itu rasional
  - Jika D tidak berbentuk kuadrat sempurna maka kedua akarnya itu irasional
- Jika D = 0, maka PK mempunyai *dua akar yang sama (akarnya kembar), real, dan rasional.*
- Jika D < 0, maka PK *tidak mempunyai akar real atau kedua akarnya tidak real*.

Rumus Jumlah & Hasil Kali Akar-Akar PK

Jika x_1 & x_2 adalah akar-akar PK $ax^2+bx+c=0$, dengan $a \neq 0$, jumlah dan hasil kali akar-akar PK itu adalah

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Dari rumus di atas, maka kita peroleh identitas-identitas berikut:

- $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
- $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$
- $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$
- $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$
- $\frac{1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$
- $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}$

Silahkan kalian buktikan kebenaran semua identitas di atas.

Jika x_1 & x_2 adalah akar-akar PK $ax^2+bx+c=0$, dengan $a \neq 0$:

- Akar-akarnya berlawanan: $(x_1=-x_2) \Leftrightarrow b=0$

✓ Akar-akarnya berkebalikan: $\left(x_1 = \frac{1}{x_2}\right) \Leftrightarrow a = c$

✓ Sebuah akarnya sama dengan nol: $(x_1 = 0) \Leftrightarrow c = 0 \;\&\; x_2 = -\frac{b}{a}$

✓ Kedua akarnya sama besar: $(x_1 = x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Contoh:

(OSP 2010) Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α & β. Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ....

Pembahasan:

$x^2 - px - 2p = 0$ akar-akarnya α & β

Syarat akar-akar real adalah

$p^2 - 4(1)(-2p) \geq 0$

$p(p + 8p) \geq 0$

Maka syarat agar α & β real adalah $p \leq -8 \;\; v \;\; p \geq 0$

Perhatikan bahwa $\alpha^3 + \beta^3 = 16$

$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 16$

$p^3 - 3(-2p)(p) = 16$

$p^3 + 6p^2 - 16 = 0$

$(p + 2)\left(p^2 + 4p - 8\right) = 0$

$p = -2$ tidak memenuhi syarat $p \leq -8 \;\; v \;\; p \geq 0$

Jika $p^2 + 4p - 8 = 0$ maka

$$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

Yang memenuhi syarat hanya $p = -2 + 2\sqrt{3}$

Jadi, jumlah semua nilai p yang memenuhi sama dengan $-2 + 2\sqrt{3}$.

Menyusun PK

✓ Menyusun PK yang diketahui akar-akarnya

Untuk menyusun PK jika diketahui akar-akarnya, ada dua metode:

- *Metode Faktor*

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

dimana $x_1 \;\&\; x_2$ akar-akar PK

- *Metode memakai rumus jumlah dan hasil kali akar-akar PK*

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

dimana $x_1 \;\&\; x_2$ akar-akar PK

✓ Menyusun PK jika akar-akarnya diketahui mempunyai hubungan dengan akar-akar PK lainnya

Untuk menyusun PK dengan kriteria ini, juga ada dua metode:

- *Memakai rumus jumlah & hasil kali akar*
- *Penghapusan indeks, jika bentuk akar-akarnya simetris*

LATIHAN 6A.II

1. (AHSME, 1950/13/Book I) The roots $\left(x^2-3x+2\right)x\,(x-4)=0$ are ...
2. (AHSME, 1950/38/Book I) Jika ekspresi $\begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$ mempunyai nilai ab-cd untuk semua nilai a, b, c, dan d, maka nilai x yang memenuhi persamaan $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{vmatrix}=3$. adalah ...
3. (AHSME, 1950/42/Book I) The equation $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$ is satisfied when x is equal to ...
4. (NYCIML, Fall 1976/27) Jika $c>a>0$ dan jika $a-b+c=0$, tentukan akar yang terbesar dari persamaan $ax^2+bx+c=0$.
5. (NYCIML, Fall 1977/28) Jika $\sin^2 15^o$ adalah salah satu akar dari $x^2+bx+c=0$, tentukan pasangan terurut dari bilangan rasional (b,c).
6. (NYCIML, Fall 1978/9) Tentukan semua nilai x yang memenuhi $6\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+50=0$
7. (NYCIML, Spring 1979/7) Grafik fungsi kuadrat melalui titik dengan koordinat $(-1,-2)$, $(1,0)$, $(2,7)$, dan $(3,y)$. Tentukan nilai y.
8. (NYCIML, Spring 1979/23) Jika n bilangan bulat positif, tentukan (dalam suku n) semua nilai x lebih dari 1 yang memenuhi $4x^{1/(2n)}-x^{1/n}-3=0$
9. (NYCIML, Fall 1980/29) If reciprocal dari (x+y) is equal to the sum of reciprocal of x and reciprocal of y, find all possible numerical value of $\frac{x}{y}$.
10. (NYCIML, Spring 1981/3) Find all ordered pairs (p,q) of real numbers for which $|p|=|q|=1$ and the equation $x^2+px+q=0$ has only real roots.
11. (NYCIML, Fall 1982/1) Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$.

LATIHAN 6B.II

1. (AMC12, 2001/23) A polynomial of degree four with leading coefficient 1 and integer coefficients has two real zeros, both of which are integers. Which of the following can also be a zero of polynomial? $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}$; $\frac{1+i\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+i}{2}$; $\frac{1}{2}+i$; or $1+\frac{i}{2}$
2. (AMC12A, 2002/1) Berapa jumlah semua akar-akar dari persamaan $(2x+3)(x-4)+(2x+3)(x-6)=0$?
3. (AMC12A, 2002/12) Kedua akar-akar persamaan kuadrat $x^2-63x+k=0$ adalah bilangan prima. Berapa banyak nilai k yang mungkin?
4. (AMC12A, 2002/13) Two different positive numbers a and b each differ from their reciprocals by 1. What is a + b?
5. (AMC12B, 2002/6) Andaikan a dan b bilangan real tidak nol, dan persamaan $x^2+ax+b=0$ mempunyai solusi a dan b. Berapakah pasangan yang mungkin untuk (a,b)?

6. (AMC12A, 2005/9) Ada dua nilai a yang memenuhi persamaan $4x^2 + ax + 8x + 9 = 0$ hanya mempunyai satu solusi untuk x. Berapakah jumlah dari dua nilai a tersebut?
7. (AMC12B, 2005/8) For how many values of a is it true that the line $y = x + a$ passes through the vertex of the parabola $y = x^2 + a^2$?
8. (AMC12B, 2005/12) Persamaan kuadrat $x^2 + mx + n = 0$ mempunyai akar-akar dua kali dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + px + m = 0$, dan tidak ada nilai m, n, dan p yang nol. Berapa nilai dari $\frac{n}{p}$?
9. (AMC12B, 2006/12) Parabola $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai vertek/Titik balik (p,p) dan titik perpotongan dengan sumbu Y (0,-p) dimana p tidak sama nol. Berapa nilai b?
10. (AMC12B, 2007/24) Berapa banyak bilangan bulat positif (a,b) sedemikian sehingga FPB(a,b)=1 dan $\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a}$ merupakan bilangan bulat?

III. Persamaan Eksponent

Sifat-Sifat Fungsi Eksponent

Jika $a, b \in \Re$, $a \neq 0$, m dan n bilangan rasional, maka sifat-sifat fungsi eksponent adalah sebagai berikut:

- ✓ $a^m . a^n = a^{m+n}$
- ✓ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ✓ $(a^m)^n = a^{mn}$
- ✓ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- ✓ $(a^m . b^n)^p = a^{mp} . b^{np}$
- ✓ $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{mp}}{b^{np}}$
- ✓ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$
- ✓ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[mn]{a^p} = a^{\frac{p}{mn}}$
- ✓ $a^0 = 1$

Persamaan Eksponent

1. Bentuk $a^{f(x)} = a^m$

Jika $a^{f(x)} = a^m, a > 0, \& \ a \neq 1,$ maka $f(x) = m$

2. Bentuk $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$ & $a \neq 1$ maka $f(x) = g(x)$

3. Bentuk $a^{f(x)} = b^{f(x)}, a \neq b$

Jika $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, $a, b > 0, a, b \neq 1$, dan $a \neq b$ maka $f(x) = 0$

4. Bentuk $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$

Jika $f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)}$, maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:
- ✓ $g(x) = h(x)$
- ✓ $f(x) = 1$
- ✓ $f(x) = 0$, asalkan g(x) dan h(x) keduanya positif
- ✓ $f(x) = -1$, asalkan g(x) dan h(x) keduanya genap atau keduanya ganjil

5. Bentuk $a\left(k^{f(x)}\right)^2 + b\left(k^{f(x)}\right) + c = 0, b > 0, b \neq 1, a \neq 0, a, b, c \in \Re$
   Untuk menyelesaikan bentuk ini, ikuti langkah-langkah berikut:
   - ✓ Memisalkan dahulu $y = k^{f(x)}$
   - ✓ Dari pemisalan tersebut, akan diperoleh bentuk persamaan kuadrat dalam y, yakni $ay^2 + by + c = 0$
   - ✓ Selesaikan persamaan kuadrat yang kamu peroleh tadi, sehingga diperoleh nilai y.
   - ✓ Substitusikan nilai y tadi ke pemisalan semula, yakni $y = k^{f(x)}$
   - ✓ Sehingga akan kita peroleh nilai x

LATIHAN 6A.III

1. (AMC12, 2001/5) Berapakah perkalian semua bilangan bulat ganjil positif kurang dari 10.000?
   A. $\dfrac{10000!}{(5000!)^2}$
   B. $\dfrac{10000!}{2^{5000}}$
   C. $\dfrac{9999!}{2^{5000}}$
   D. $\dfrac{10000!}{2^{5000}.5000!}$
   E. $\dfrac{5000!}{2^{5000}}$
2. (AMC12A, 2002/3) According to the standard convention for exponentiation,

$2^{2^{2^2}} = 2^{\left(2^{\left(2^2\right)}\right)} = 2^{16} = 65.536$. If the order in which the exponentiations are performed is changed, how many other values are possible?

3. (AMC12A, 2004/6) Misalkan $U = 2.\,2004^{2005}$, $V = 2004^{2005}$, $W = 2003.\,2004^{2004}$, $X = 2.\,2004^{2004}$, $Y = 2004^{2004}$ dan $Z = 2004^{2003}$. Dari bilangan-bilangan berikut, mana yang paling besar?
   A. U – V
   B. V – W
   C. W – X
   D. X – Y
   E. Y - Z
4. (NYCIML, Fall 1977/30) Andaikan f dan g fungsi berturut-turut didefinisikan $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x$. Tentukan semua x>-2 yang memenuhi $3^{g(x).\log_3 f(x)} = f(x)$
5. (NYCIML, Fall 1981/8) Jika $2\left(4^x\right) + 6^x = 9^x$ dan $x = \log_{2/3} a$, tentukan nilai dari a?
6. (AHSME,1996/6/AMC7) Jika $f(x) = x^{(x+1)}(x+2)^{(x+3)}$, maka $f(0) + f(-1) + f(-2) + f(-3) = ...$
7. (AHSME,1998/5/AMC7) Jika $2^{1998} - 2^{1997} - 2^{1996} + 2^{1995} = k.2^{1995}$, Berapakah nilai k yang memenuhi?

IV. Bentuk Akar

Konsep Bilangan Irasional

Sebelum kita mendefinisikan bilangan irasional, kita ulas kembali, pengertian dari bilangan rasional. Bilangan rasional merupakan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q},\ p,q \in Z,\ q \neq 0$.

Dari definisi di atas, maka dapat kita definisikan bahwa bilangan irasional merupakan bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q},\ p,q \in Z,\ q \neq 0$.

Bilangan Irasional	Bilangan Rasional
$\pi = 3{,}141592...$	$\frac{17}{99} = 0{,}17171717....$
$e = 2{,}718281.....$	$\sqrt{9} = 3{,}00000.....$
$\sqrt{2} = 1{,}414213.....$	4 = 4,000000....
$\sqrt{7} = 2{,}6457......$	$1,\overline{6} = 1{,}66666..... = \frac{15}{9}$

UJI DIRI:

Ubahlah bentuk desimal berikut ke bentuk rasional/pecahan:

- $1,\overline{7} = 1{,}777777......$
- $2,\overline{23} = 2,\ 23232323....$
- $3,\overline{401} = 3,\ 401401401....$

Definisi Bentuk Akar

Secara umum, bentuk akar ditulis dalam bentuk $\sqrt[n]{a}$
($\sqrt[n]{a}$ dibaca "akar pangkat n dari a")
dengan:
$\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar (radikal)
$\sqrt{\ }$ disebut lambang bentuk akar
n disebut indeks (pangkat akar)
a disebut radikan (bilangan di bawah tanda akar), dengan a bilangan riil positif untuk n bilangan asli dan untuk n bilangan ganjil, a dapat berupa bilangan riil negatif.

Bentuk akar terbagi atas 2 jenis:

1. **Akar Senama**
   Suatu bentuk akar dikatakan akar senama jika indeks (pangkat akar)nya sama,
   Contoh:
   - ✓ $\sqrt{7}, \sqrt{19}, \sqrt{31}$, mempunyai indeks 2
   - ✓ $\sqrt[5]{2}, \sqrt[5]{7}, \sqrt[5]{19}$, mempunyai indeks 5
2. **Akar Sejenis**
   Suatu bentuk akar dikatakan akar sejenis jika indeks dan radikannya sama,
   Contoh:
   - ✓ $\sqrt{7}, 2\sqrt{7}, 5\sqrt{7}$, mempunyai indeks 2 dan radikan 7
   - ✓ $\sqrt[5]{2}, 3\sqrt[5]{2}, 7\sqrt[5]{2}$, mempunyai indeks 5 dan radikan 2

Operasi pada Bentuk Akar

Untuk semua bilangan real a dan b serta n bilangan asli maka berlaku:

1. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3. $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$

Catatan:
Untuk sebarang a bilangan real dan a tidak sama dengan nol, m bilangan bulat, n bilangan asli, dan n lebih dari atau sama dengan 2 berlaku:

- ✓ $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- ✓ $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Merasionalkan Penyebut

- Bentuk $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$

  Cara merasionalkan bentuk ini adalah

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}$$

- Bentuk $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ / $\frac{a}{\sqrt{b}-c}$ / $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$ / $\frac{a}{\sqrt{b}+c}$

  Cara merasionalkan bentuk ini adalah

  ✓ $\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a}{b-\sqrt{c}}.\frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}}=\frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$

  ✓ $\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}.\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=\frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$

  ✓ $\frac{a}{\sqrt{b}-c}=\frac{a}{\sqrt{b}-c}.\frac{\sqrt{b}+c}{\sqrt{b}+c}=\frac{a\left(\sqrt{b}+c\right)}{b\ \ -c^2}$

  ✓ $\frac{a}{\sqrt{b}+c}=\frac{a}{\sqrt{b}+c}.\frac{\sqrt{b}-c}{\sqrt{b}-c}=\frac{a\left(\sqrt{b}-c\right)}{b\ \ -c^2}$

- Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$

  Cara merasionalkan bentuk ini adalah

  $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}.\frac{\sqrt{b}\mp\sqrt{c}}{\sqrt{b}\mp\sqrt{c}}=\frac{a\,(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}$

Menyederhanakan Bentuk Akar $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$

Bentuk $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ dapat disederhanakan menjadi bentuk $\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)$ dengan a, b bilangan real dan a>b.

Coba kalian buktikan bentuk ini.

LATIHAN 6A.IV

1. (OSK, 2013) Misalkan a dan b adalah bilangan asli dengan a > b. Jika $\sqrt{94+2\sqrt{2013}}=\sqrt{a}+\sqrt{b},$ maka nilai a – b adalah ...
2. Tuliskan setiap bentuk akar berikut ke dalam bentuk operasi akar tunggal yakni $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ dengan a > b.
   a. $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$
   b. $\sqrt{9-\sqrt{56}}$
   c. $\sqrt{5+\sqrt{24}}$
   d. $\sqrt{5-\sqrt{21}}$
3. Hitunglah $\sqrt{45+20\sqrt{5}}+\sqrt{45-20\sqrt{5}}$
4. Nilai dari bentuk-bentuk berikut adalah
   a. $\frac{\sqrt{128}-\sqrt{32}+\sqrt{8}}{\sqrt{27}}$

b. $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt{18}}{\sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

c. $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$

d. $\left[1+\left[3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}\right]^{1/2}\right]^{1/2}$

e. $\dfrac{1}{3-\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

f. $\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16.....}}}$

g. $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$

5. Nilai x dan y yang memenuhi $(x+y\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=-\sqrt{2}$ adalah ...
6. Nilai x yang memenuhi $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{x}-\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{x}=3/2$ adalah ...
7. Manakah dari bilangan-bilangan di bawah ini yang merupakan bilangan terbesar: $6\sqrt[3]{6}, 8\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{130}, \sqrt[3]{900}$
8. Sederhanakan bentuk: x^2+xy+y^2 untuk $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ dan $y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
9. Sederhanakan bentuk:

a. $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$

V. Persamaan Logaritma

Definisi Logaritma

Jika $b=a^c$ maka ${}^a\log b=c$, dan sebaliknya jika ${}^a\log b=c$ maka $b=a^c$.
Hubungan antara bilangan berpakat dan logaritma dapat dinyatakan sebagai berikut:

$${}^a\log b=c \Leftrightarrow b=a^c$$

dengan a = bilangan pokok/basis, a>0, $a\neq 0$
b = *numerus* (yang dicari nilai logaritmanya), b > 0
c = hasil logaritma
Jika a = 10, maka cukup di tulis: $\log b=c$.

Sifat-Sifat Logaritma

1. Untuk $a>0,\ \ a\neq 1$, berlaku:

$${}^a\log a=1 \quad {}^a\log 1=0,\ \log 10=1$$

2. Untuk $a>0,\ a\neq 1,\ x,y>0$ serta $a,x,y\in\Re$ berlaku:

$${}^a\log x+{}^a\log y={}^a\log xy$$

3. Untuk $a > 0,\ a \neq 1,\ x, y > 0$ serta $a, x, y \in \Re$ berlaku:

$${}^{a}\log x - {}^{a}\log y = {}^{a}\log\left(\frac{x}{y}\right)$$

4. Untuk $a > 0,\ a \neq 1,$ serta $a, n, x, \in \Re$ berlaku:

$${}^{a}\log x^{n} = n.\ {}^{a}\log x$$

5. Untuk a, m > 0 serta $a, n, m, x, \in \Re$ berlaku:

$${}^{a^{m}}\log x^{n} = \frac{n}{m}\ {}^{a}\log x$$

6. Untuk $a, p > 0$ dan $a, p \neq 1$, serta $a, p, \&\ x \in \Re$, berlaku:

$${}^{a}\log x = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log x} = \frac{1}{{}^{x}\log a}$$

7. Untuk a>0, x>0, y>0, a, x , dan y $\in \Re$ berlaku:

$${}^{a}\log x.\ {}^{x}\log y = {}^{a}\log y$$

8. Untuk a>0, serta a dan x $\in \Re$, berlaku:

$$a^{{}^{a}\log x} = x$$

Persamaan Logaritma

1. Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log n$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log n$, $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0$, maka f(x) = n

2. Bentuk ${}^{a}\log g(x) = {}^{b}\log g(x)$

Jika ${}^{a}\log g(x) = {}^{b}\log g(x)$, $a \neq b, a, b > 0,\ a, b \neq 1$,
maka f(x) = 1

3. Bentuk ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$

Jika ${}^{a}\log f(x) = {}^{a}\log g(x)$, $a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0$,
maka $f(x) = g(x)$

4. Bentuk ${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x)$, $f(x), g(x), h(x) > 0, \&\ f(x) \neq 1$,

Jika
${}^{f(x)}\log g(x) = {}^{f(x)}\log h(x),\ f(x), g(x), h(x) > 0, \&\ f(x) \neq 1$
, maka $g(x) = h(x)$

5. Bentuk $a.\ {}^{l}\log f(x) + b.\ {}^{l}\log f(x) + c = 0$
   Untuk menyelesaikan bentuk ini, ikuti langkah-langkah berikut:
   - ✓ Memisalkan dahulu $y = {}^{l}\log f(x)$
   - ✓ Dari pemisalan tersebut, akan diperoleh bentuk persamaan kuadrat dalam y, yakni $ay^2 + by + c = 0$
   - ✓ Selesaikan persamaan kuadrat yang kamu peroleh tadi, sehingga diperoleh nilai y.
   - ✓ Substitusikan nilai y tadi ke pemisalan semula, yakni $y = {}^{l}\log f(x)$
   - ✓ Sehingga akan kita peroleh nilai x
   - ✓ Cek, nilai x tersebut harus menyebabkan nilai f(x) > 0

LATIHAN 6A.V

1. (OSK, 2012/Tipe 1) Jumlah semua bilangan bulat x sehingga ${}^{2}log\ (x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah ....
2. (AMC12B, 2003/17) Jika $\log(xy^3) = 1$ dan $\log(x^2y) = 1$, berapakah nilai $\log(xy)$?
3. (AMC12A, 2002/14) Untuk semua bilangan bulat positif n, misalkan $f(n) = \log_{2002} n^2$. Misalkan $N = f(11) + f(13) + f(14)$, maka nilai yang mungkin untuk N adalah
4. (AMC12B, 2002/22) Untuk semua bilangan bulat n lebih dari 1, didefinisikan $a_n = (\log_n 2002)^{-1}$. Misalkan $b = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ dan $c = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14}$. Berapakah nilai b-c?
5. (AMC12A, 2003/24) Jika $a \geq b > 1$, berapakah kemungkinan nilai terbesar dari $\log_a(a/b) + \log_b(b/a)$?
6. (AMC12A, 2005/23) Dua bilangan berbeda a dan b dipilih secara acak dari himpunan $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^{25}\}$. Berapakah peluang bahwa $\log_a b$ merupakan bilangan bulat?
7. (AMC12B, 2004/17) Untuk suatu bilangan real a dan b, persamaan $8x^3 + 4ax^2 + 2bx + a = 0$ mempunyai tiga akar-akar positif berbeda. Jika jumlah dari logaritma basis 2 dari akar-akarnya adalah 5, berapakah nilai dari a?
8. (AMC12A, 2005/21) Berapa banyak pasangan tripel bilangan bulat (a, b, c), dengan $a \geq 2, b \geq 1, \& c \geq 0$, memenuhi $\log_a b = c^{2005}$ dan $a + b + c = 2005$?
9. (AMC12B, 2005/13) Andaikan bahwa $4^{x_1} = 5,\ 5^{x_2} = 6,\ 6^{x_3} = 7, ..., 127^{x_{124}} = 128$. Berapakah nilai dari $x_1 x_2 .... x_{124}$?
10. (AMC12B, 2005/17) Berapa banyak pasangan 4-tupel berbeda (a,b,c,d) dari bilangan rasional yang ada dengan persamaan $a \log_{10} 2 + b \log_{10} 3 + c \log_{10} 5 + d \log_{10} 7 = 2005$?
11. (AMC12B, 2005/23) Let S be the set of ordered triples (x,y,z) of real numbers

for which $\log_{10}(x+y)=z$ and $\log_{10}(x^2+y^2)=z+1$. There are real numbers a and b such that for all ordered triples (x,y,z) in S we have $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$. What is the value of a+b?

12. (AMC12A, 2006/21) Misalkan $S_1=\{(x,y)|\ \log_{10}(1+x^2+y^2)\le 1+\log_{10}(x+y)\}$ dan $S_2=\{(x,y)|\log_{10}(2+x^2+y^2)\le 2+\log_{10}(x+y)\}$. Berapakah perbandingan luas daerah antara S_2 dan S_1?
13. (AMC12B, 2006/20) Misalkan x dipilih secara acak dari interval (0,1). Berapakah peluang bahwa $\lfloor \log_{10} 4x \rfloor - \lfloor \log_{10} x \rfloor = 0$?
    Cat.: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x.
14. (AMC12A, 2007/23) Persegi ABCD mempunyai luas 36, dan $\overline{AB}$ sejajar sumbu X. Titik sudut A, B, dan C berturut-turut pada grafik $y=\log_a x$, $y=2\log_a x$, dan $y=3\log_a x$. Berapakah nilai a?
15. (AMC12B, 2007/17) Jika a bilangan bulat tidak nol dan b bilangan bulat positif sedemikian hingga $ab^2=\log_{10} b$, berapakah median himpunan $\{0,1,a,b,1/b\}$?

Sistem Persamaan

Bentuk yang melibatkan variabel, yaitu:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c$$

disebut persamaan dengan n buah variabel. Sistem persamaan adalah suatu sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan, yakni

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_1 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_2 \\ \quad\vdots \\ f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c_m \end{cases}$$

Sistem persamaan di atas disebut sistem persamaan dengan n buah variabel dan m persamaan. Solusi dari suatu sistem persamaan adalah solusi secara simultan dari semua persamaan di dalam sistem ini. Cara baku untuk menyelesaikan sistem persamaan telah dipelajari siswa-siswi sejak SMP, yakni dengan cara Eliminasi, Substitusi, atau Campuran. Untuk menyelesaikan soal-soal olimpiade yang berkaitan dengan selesaian suatu sistem persamaan dapat menggunakan konsep yang sudah kita pelajari pada waktu di SMP atau dengan cara-cara yang elegan/cantik.

Contoh 1:

Tentukan $a+b+c+d$ jika diketahui: $\begin{cases} a+3b+2d=6160 \\ 6a+2b=7680 \\ 6c+3d=8820 \end{cases}$ (*seleksi IMO 1993*)

Pembahasan:

Jika soal di atas diselesaikan dengan cara biasa, yakni mencari a, b, c, dan d dahulu

seperti metode yang telah kita pelajari pada waktu di SMP, maka kita akan menemui kesulitan. Akan tetapi, jika diselesaikan dengan cara yang cantik/elegan yakni tanpa mencari nila a, b, c, dan d maka hasilnya:

Persamaan kedua dikali 1/2, maka kita peroleh $3a+b=3840$.........(4)

Persamaan ketiga dikali 2/3, maka kita peroleh $4c+2d=5880$........(5)

Jumlahkan persamaan (1), (4), dan (5), maka kita peroleh $4a+4b+4c+4d=15880$, Sehingga kita peroleh: $a+b+c+d=3970$.

Contoh 2:

Tentukan nilai x, y, v, dan u jika diketahui: $\begin{cases} x+7y+3v+5u=16 \\ 8x+4y+6v+2u=-16 \\ 2x+6y+4v+8u=16 \\ 5x+3y+7v+u=-16 \end{cases}$

Pembahasan:

Jumlahkan persamaan pertama dan keempat serta persamaan kedua dan ketiga:

$$6(x+u)+10(y+v)=0$$
$$10(x+u)+10(y+v)=0$$

Sehingga kita peroleh $x+u=0$ dan $y+v=0$. Substitusikan –x ke u dan –y ke v ke persamaan semula, maka kita peroleh:

$$-4x+4y=16$$
$$6x-2y=-16$$

Jadi, $x=-2, y=2, u=2, v=-2$

Contoh 3:

Cari semua solusi real dari sistem persamaan $\begin{cases} x+\dfrac{2}{x}=2y \\ y+\dfrac{2}{y}=2z \\ z+\dfrac{2}{z}=2x \end{cases}$.

Pembahasan:

Misalkan (x,y,z) solusi sistem persamaan di atas. Diantara x, y, dan z tidak mungkin ada yang nol. Perhatikan bahwa jika salah satu positif maka dua yang lain juga positif. Selanjutnya, dengan mengalikan dengan -1 akan kita peroleh solusi yang lain. Asumsikan x,y,z>0. Dengan menggunakan ketaksamaan AM-GM untuk masing-masing persamaan kita peroleh:

$$2y=x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\left(\frac{2}{x}\right)}=2\sqrt{2}\leftrightarrow y\geq\sqrt{2}$$

Dengan cara yang sama maka kita peroleh: $z\geq\sqrt{2}$ & $x\geq\sqrt{2}$

Dengan menambahkan semua persamaan dari sistem persamaan semula dan hasil di atas, diperoleh:

$3\sqrt{2}\leq x+y+z=2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right)\leq 3\sqrt{2}$. Dengan demikian haruslah $x=y=z=\sqrt{2}$.

Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$ dan $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ adalah solusi yang dimaksud.

LATIHAN 6B

1. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} \dfrac{x-y}{5} - \dfrac{x+y}{4} = \dfrac{1}{2} \\ 2(x-y) - 3(x+y) + 1 = 0 \end{cases}$

2. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + 3y + 6z = 15 \end{cases}$

3. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 6 \\ z + x = 7 \end{cases}$

4. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$

5. Diketahui x, y, z memenuhi sistem persamaan
$\begin{cases} 2000(x-y) + 2001(y-z) + 2002(z-x) = 0 \\ 2000^2(x-y) + 2001^2(y-z) + 2002^2(z-x) = 2001 \end{cases}$. Tentukan nilai dari $z - y$.

6. Tentukan semua solusi real dari sistem persamaan
$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 9x^2y^2z^2 \end{cases}$

7. Buktikan bahwa solusi positif dari sistem persamaan $\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3 \end{cases}$ hanya
$(x, y, z) = (1, 1, 1)$

8. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y \\ y + \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = z \\ z + \log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right) = x \end{cases}$

9. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} \log(2xy) = \log x \log y \\ \log(yz) = \log y \log z \\ \log(2zx) = \log z \log x \end{cases}$

10. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{cases}$ untuk x, y, z bilangan real positif.

11. Tentukan semua solusi bilangan bulat untuk sistem persamaan
$3 = x + y + z = x^3 + y^3 + z^3$

12. Tentukan nilai x, y, u, dan v yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x + y + u = 4 \\ y + u + v = -5 \\ u + v + x = 0 \\ v + x + y = -8 \end{cases}$

13. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} 5732x + 2134y + 2134z = 7866 \\ 2134x + 5732y + 2134z = 670 \\ 2134x + 2134y + 5734z = 11464 \end{cases}$.

14. Selesaikan sistem persamaan $\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36 \\ 6x^2 + y^2 + 5z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36 \\ 5x^2 + 6y^2 + z^2 + 8(yz + zx + xy) = 36 \end{cases}$.

15. Diketahui bilangan real x, y, z memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 90 \end{cases}$.

    Tentukan nilai dari xyz dan $x^4 + y^4 + z^4$.

7. Barisan & Deret

Pendahuluan Barisan

Perhatikan barisan sederhana berikut: 1, 2, 3, 4, ... Ini mudah kita dapat menentukan suku berikutnya, yakni dengan menambah 1 suku sebelumnya. Jadi, rumus suku ke-n barisan sederhana ini adalah n. Di bawah ini ada tabel tentang rumus suku ke-n suatu barisan:

Barisan	Rumus Suku Ke-n
1, 3, 5, ...	2n - 1
13, 8, 3, ...	18-5n
1, 4, 9, 16, ...	n^2
1/2, 1/4, 1/8, ...	$1/2^n$
$\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$	$1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

NB: untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $n = 1$ berkorespondensi dengan suku ke-1 dari suatu barisan, $n = 2$ berkorespondensi dengan suku ke-2 dari suatu barisan, dst.

Notasi Penjumlahan

Perhatikan penulisan jumlah dari kuadrat n bilangan asli pertama dalam notasi sigma adalah $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2$. Contoh lain penulisan dalam notasi sigma adalah sebagai berikut:

✓ $1 - 2 + 4 - 8 + \ldots + (-2)^n = \sum_{i=0}^{n} (-2)^i$

✓ $1! + 2! + 3! + \ldots + n! = \sum_{i=1}^{n} i!$

Contoh-contoh di atas merupakan jumlah berhingga, berikut diberikan contoh jumlah tak berhingga:

✓ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots. = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$

✓ $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} 2^i = +\infty$

Contoh 1:

Tentukan nilai $\sum_{i=1}^{4} \frac{(2n)!}{2^n}$ (*n!=1.2.3....(n-1).n*)

Pembahasan:

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{(2n)!}{2^n}=\frac{2!}{2}+\frac{4!}{4}+\frac{6!}{8}+\frac{8!}{16}=1+6+90+2520=2617.$$

Barisan & Deret Aritmatika

Pada saat di SMP Kelas IX, telah di bahas tentang baik Barisan dan deret Aritmatika maupun geometri. Di sini akan direview tentang rumus suku ke-n, rumus jumlah n suku pertama, dan rumus suku tengah.

$$U_n=a+(n-1)b$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+U_n)=\frac{n}{2}(2a+(n-1)b)$$

$U_t=\dfrac{a+U_n}{2}$, dimana n merupakan bilangan ganjil

Ket:

U_n : Suku ke-n

S_n : Jumlah n suku pertama

U_t : Suku tengah

$a, b, \& n$ berturut-turut: suku pertama, beda, dan banyaknya suku

$b=U_2-U_1=U_3-U_2=....=U_n-U_{n-1}$

Perhatikan deret berikut, $1+2+3+....+(n-1)+n$, merupakan jumlah n suku pertama bilangan asli, juga merupakan deret aritmatika dengan a=b=1. Sehingga

$$S_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)b)=\frac{n}{2}(2+(n-1))=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Jadi, $\sum_{i=1}^{n} i=1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Contoh 2:

Tentukan nilai jumlah: $1996^2-1995^2+1994^2-1993^2+...+2^2-1^2$

Pembahasan:

Jumlah pada soal, dapat kita tulis sebagai

$(1996^2-1995^2)+(1994^2-1993^2)+....+(2^2-1^2)$ dan jika kita amati maka terdapat 998 pasang bilangan. Sehingga dapat dapat menulis dalam notasi sigma,

$$\sum_{i=1}^{998}\left((2n)^2-(2n-1)^2\right)=\sum_{i=1}^{998}\left(4n^2-(4n^2-4n+1)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{998}(4n-1)$$

$$=4\sum_{i=1}^{998}n-\sum_{i=1}^{998}1$$

$$=\frac{4(998)(998+1)}{2}-998=998000.$$

Barisan & Deret Geometri

Berikut rumus-rumus berkaitan dengan barisan geometri:

$$U_n=ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r},\ r \neq 1$$

Ket:
U_n : Suku ke-n
S_n : Jumlah n suku pertama
$a, r, \& n$ berturut-turut: suku pertama, rasio, dan banyaknya suku

$$r = \frac{U_2}{a} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Contoh 3:

Rumus jumlah n suku pertama diberikan sebagai berikut: $3^n - 1$, berpakah suku pertama deret ini? Apakah deret ini merupakan deret geometri dan jika ya, berapakah rasionya?

Pembahasan:

$$S_n = 3^n - 1 \text{ dan } S_{n-1} = 3^{n-1} - 1.$$

Sekarang, rumus suku ke-n deret ini:

$$U_n = S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - 3^{n-1} + 1 = 2.\,3^{n-1}.$$

Jadi, $U_1 = a = 2$.

Jelas, ini merupakan deret geometri dengan rasio 3.

Contoh 4:

Tentukan rumus jumlah n suku deret: $\frac{3}{2} + \frac{21}{4} + \frac{63}{8} + \frac{177}{16} + \ldots.$

Pembahasan:

$$\frac{3}{2} + \frac{21}{4} + \frac{63}{8} + \frac{177}{16} + \ldots.$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(5 + \frac{1}{4}\right) + \left(8 - \frac{1}{8}\right) + \left(11 + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(5 + \frac{1}{4}\right) + \left(8 - \frac{1}{8}\right) + \left(11 + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

$$= \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)\right) + \left(5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right) + \left(11 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4\right) + \ldots$$

$$= (2 + 5 + 8 + 11 + \ldots) + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \ldots\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (3i - 1) + \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$$

$$= 3\sum_{i=1}^{n} i - n - \frac{1}{2}\left(\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2} - 1}\right) = \frac{3n(n+1)}{2} - n + \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

$$=\frac{3n^2+n}{2}+\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=\frac{n(3n+1)}{2}+\frac{1}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n-1\right).$$

Deret Geometri Tak Hingga

Deret ini merupakan kasus khusu dari deret geometri ketika $|r|<1$ dan n sangat besar. Jadi, rumus jumlah takhingga deret geometri adalah

$$S_\infty=\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1}=\frac{a}{1-r}.$$

Deret geometri takhingga ini akan mempunyai jumlah/convergen jika $|r|<1 \Leftrightarrow -1<r<1$.

Contoh 5:

Tentukan jumlah dari n suku pertama barisan $0{,}1;\ 0{,}11;\ 0{,}111;\ 0{,}1111;\ldots$. Dan juga tentukan bilangan rasional yang menyatakan ekspansi desimal berulang pada bilangan $0{,}111111\ldots$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa suku pertama barisan adalah $0{,}1=\frac{1}{10}$

Suku ke dua adalah $0{,}11=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}$

Suku ke tiga adalah $0{,}111=\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}$

Sehingga, rumus suku ke-n adalah $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^i=\dfrac{\frac{1}{10}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n-1\right)}{\frac{1}{10}-1}$

$$=\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right).$$

Jadi, jumlah n suku pertama barisan pada soal adalah

$$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^i\right)=\frac{n}{9}-\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^i$$

$$=\frac{n}{9}-\frac{1}{9}\left[\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\right]$$

$$=\frac{n}{9}-\frac{1}{81}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right).$$

Untuk menyatakan 0,111111.... dalam bentuk rasional. Perhatikan bahwa:

$0{,}11111\ldots=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$, dimana ini merupakan deret geometri takhingga dengan $a=r=\frac{1}{10}$. Sehingga $0{,}1111\ldots=S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}.$

Berikut ini merupakan rumus jumlah kuadrat dan pangkat tiga n bilangan asli:

✓ $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

✓ $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Contoh 6:

(OSK 2009) Bilangan bulat positif terkecil n dengan n>2009 sehingga $\sqrt{\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{n}}$ merupakan bilangan bulat adalah ...

Pembahasan:

$\sqrt{\frac{1^3+2^3+3^3+...+n^3}{n}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n}}=\sqrt{n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$. Agar $\sqrt{n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$ merupakan bilangan bulat, maka haruslah n merupakan bilangan kuadrat sempurna. Bilangan kuadrat terkecil setalah 2009 adalah 45^2=2025.

Jadi, nilai n terkecil yang memenuhi adalah 2025.

Contoh 7:

Tentukan jumlah n suku pertama deret:

$(1^2)+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+(1^2+2^2+3^2+4^2)+....$

Pembahasan:

Perhatikan bahwa rumus suku ke-n:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

Jadi, jumlah n suku pertamanya adalah;

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^3}{3}+\frac{i^2}{2}+\frac{i}{6}\right)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} i^3+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} i$$

$$=\frac{1}{3}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)[n(n+1)+(2n+1)+1]}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12}=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

Prinsip Teleskopik

Ada dua bentuk umum dari prinsip teleskopik, yakni penjumlahan dan perkalian.

✓ $\sum_{k=2}^{n}(F_k-F_{k-1})=(F_2-F_1)+(F_3-F_2)+...+(F_{n-1}-F_{n-2})+(F_n-F_{n-1})=F_n-F_1$

✓ $\prod_{k=2}^{n}\frac{F_k}{F_{k-1}}=\frac{F_2}{F_1}.\frac{F_3}{F_2}.\frac{F_4}{F_3}....\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}.\frac{F_n}{F_{n-1}}=\frac{F_n}{F_1}.$

Contoh 8:

$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)....\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)=....$

Pembahasan:
Ini merupakan salah satu contoh penerapan dari teleskopik perkalian,
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)....\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6}.....\frac{n+1}{n+2}.\frac{n+2}{n+3}=\frac{3}{n+3}.$$

Contoh 9:

Hitunglah bentuk dari $\sum_{k=1}^{n} k!\,k$

Pembahasan:
Jika kita tulis, $k!\,k = k!\,(k+1-1) = (k+1)! - k!$, maka soal di atas dapat ditulis menjadi

$\sum_{k=1}^{n} ((k+1)! - k!)$ setelah menerapkan konsep teleskopik penjumlahan kita dapat

$\sum_{k=1}^{n} k!\,k = (n+1)! - 1.$

Contoh 10:

Buktikan bahwa $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

Pembahasan:
Perhatikan bahwa:
$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n}\right).\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}$$
$$=\frac{1}{N}.\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}$$

Ketika N medekati takhingga, maka $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$. (Terbukti)

LATIHAN 7A

1. (OSK, Tipe 1/2011) Bilangan asli disusun seperti bagan di bawah ini.

   1
   2 3 4
   5 6 7 8 9
   10 11 12 13 14 15 16
   ......

   Besar bilangan ketiga dari kiri dalam baris ke-50 adalah ....
2. (OSK 2009) Jika $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2}$ untuk k=1, 2, 3, ... dan $x_1 = 1$, maka

   $x_1 + x_2 + ... + x_{400} = ...$
3. (OSK 2006) Jika $X = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$, maka X =...

4. (OSK 2006) Diketahui $a+(a+1)+(a+2)+....+50=1139$. Jika bilangan positif, maka a =....
5. (OSK 2006) Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, $\cdots$ terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan adalah $\cdots\cdot$
6. (OSK 2006) Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke $\cdots\cdots$
7. (OSK 2003) Berapakah hasil perkalian $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)....\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$
8. (OSP 2011) Diberikan barisan bilangan rasional $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ yang didefinisikan dengan $a_1=2$ dan $a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Nilai a_{2011} adalah ....
9. (OSP 2009) Bilangan rasional $a<b<c$ membentuk barisan hitung (aritmatika) dan $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$. Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah ...
10. (OSP 2006) Hasil penjumlahan semua bilangan bulat di antara $\sqrt[3]{2006}$ dan $\sqrt{2006}$ adalah ....
11. (OSP 2006) Afkar memilih suku-suku barisan geometri takhingga $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...$ untuk membuat barisan geometri takhingga baru yang jumlahnya 1/7. Tiga suku pertama pilihan Afkar adalah ...
12. (OSP 2005) Bentuk sederhana dari $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)}$
13. (OSP 2004) Diberikan berturut-turut (dari kiri ke kanan) gambar-gambar pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan gambar. Berapakah banyaknya bulatan hitam pada gambar ke-n ?

14. (OSP 2004) Tentukan nilai dari $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)....\left(1-\frac{2}{2005}\right)$.
15. Hitunglah nilai dari $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{.......}}}}$
16. Hitunglah bentuk takhingga $2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{2+\cfrac{3}{.......}}}$

LATIHAN 7B

1. Tentukan nilai dari $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+.....+\frac{1}{2010.2011}$
2. Hitunglah nilai dari $\sum_{k=1}^{2012} k!\left(k^2+k+1\right)$

3. Misalkan $a_1, a_2, ..., a_n$ barisan aritmatika dengan beda d. Hitunglah $\sum_{k=1}^{2011} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}$.

4. Hitunglah jumlah dari bentuk $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{\left(3^k - 2^k\right)\left(3^{k+1} - 2^{k+1}\right)}$.

5. Suatu barisan $\{x_n\}_n$ didefinisikan sebagai $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$. Tentukan bilangan bulat terbesar yang kurang dari $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + ... + \frac{1}{x_{100}+1}$

6. Hitunglah nilai dari $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1+\frac{1}{1999^2}+\frac{1}{2000^2}}$

7. Buktikan bahwa $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + ... + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$

8. Buktikan bahwa $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$

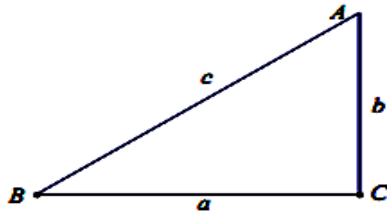
9. Hitunglah nilai dari $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)$

BAB II
GEOMETRI

1. TRIGONOMETRI

Dalam buku ini, akan di bahas dasar-dasar dari trigonometri yang akan bermanfaat dalam menyelesaikan soal-soal olimpiade.

Definisi Fungsi Trigonometri

Perhatikan gambar segitiga ABC siku-siku di C,

Kita akan menulis sin A untuk $\sin\angle A$, sehingga kita definisikan fungsi trigonometri berikut:

$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c} \qquad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\sec A = \frac{c}{b} \qquad \text{cosec } A = \frac{c}{a} \qquad \cot A = \frac{b}{a}$$

Untuk satuan sudut dalam trigonometri dapat berbentuk derajat atau radian. Berikut hubungan antara derajat dan radian: π rad $= 180^0$

Nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut yang istimewa

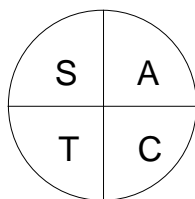
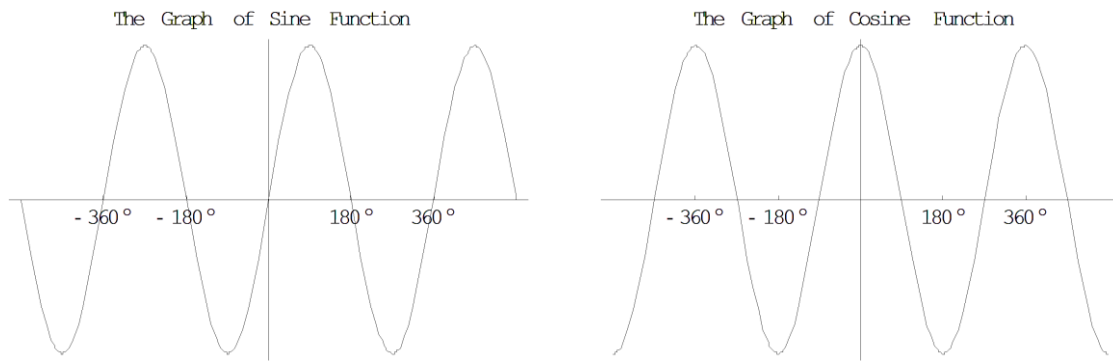
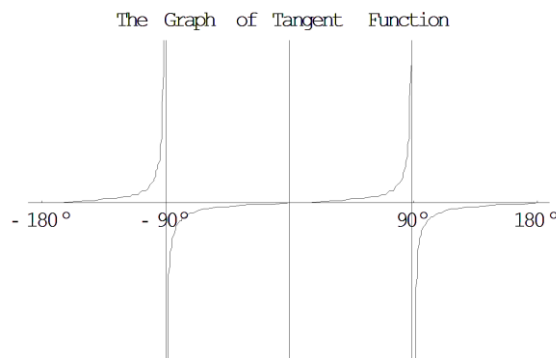
ϕ dalam derajat	sin ϕ	cos ϕ	tan ϕ
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	∞

Dari definisi trigonometri di atas, maka kita peroleh identitas:

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- $\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$
- $\cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$
- $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$
- $\operatorname{cosec} A = \dfrac{1}{\sin A}$
- $\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$
- $\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

Prinsip Reduksi

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$	$\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$
$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$	$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(90° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$
$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$	$\tan(270° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$
$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$	$\tan(270° + \theta) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$
$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

Gambar di bawah ini akan membantu kita untuk mengingat sifat-sifat di atas:

Grafik Fungsi Trigonometri

Fungsi $\sin\theta$ & $\cos\theta$ memiliki periode 360^0.

Fungsi $\tan\theta$ memiliki periode 180^o.

Solusi Umum untuk Persamaan Trigonometri

Persamaan	Solusi umum
$\sin x = \sin\alpha$	• $x_1 = \alpha + k.360^0$ atau $x_1 = \alpha + k.\,2\pi$ • $x_2 = (180^0 - \alpha) + k.360^o$ atau $x_2 = (\pi - \alpha) + k.2\pi$ dimana k bilangan bulat
$\cos x = \cos\alpha$	• $x = \pm\alpha + k.360^0$ atau $x = \pm\alpha + k.\,2\pi$ dimana k bilangan bulat
$\tan x = \tan\alpha$	• $x = \alpha + k.180^0$ atau $x = \alpha + k.\,\pi$ dimana k bilangan bulat

Contoh 1:

Buktikan identitas $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$ dimana $\sec\theta - \tan\theta \neq 0$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa kita sama saja membuktikan bahwa

$(\sec\theta + \tan\theta) : \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = 1.$

$$(\sec\theta + \tan\theta) : \frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$$

$$= \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1. \text{ (Terbukti)}$$

Contoh 2:

Tentukan semua nilai x yang memenuhi $\tan x = 1$

Pembahasan:

$\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan 45^o$

$x = 45^o + k.180^0$ untuk k suatu bilangan bulat.

LATIHAN 1A

1. Tentukan nilai eksak dari (i) $\sec\frac{1}{4}\pi$ (ii) $\cot\left(-\frac{11}{2}\right)\pi$
2. Diketahui $\sin A = \frac{3}{5}$ dimana A sudut lancip dan $\cos B = \frac{-1}{2}$ dimana B sudut tumpul, tentukan nilai dari (i) sec A (ii) cot A (iii) cot B
3. a. Nyatakan $3\tan^2\theta - \sec\theta$ dalam bentuk $\sec\theta$

   b. Selesaikan persamaan $3\tan^2\theta - \sec\theta = 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$
4. (CIE, Oct/Nov 2002, P1/A Level)
   a. Tunjukkan bahwa persamaan $3\tan\theta = 2\cos\theta$ dapat dinyatakan sebagai $2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 = 0$
   b. Selesaikan persamaan $3\tan\theta = 2\cos\theta,\ \ 0^o \le \theta \le 360^o$
5. (CIE, May/June 2003, P1/A Level)

   Tentukan semua nilai x dalam interval $0^0 \le x \le 180^0$ yang memenuhi persamaan $\sin 3x + 2\cos 3x = 0$.
6. Buktikan bahwa $\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} = \frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1}$ dimana $\tan\theta \ne 0$.

Rumus-Rumus Trigonometri

A. Jumlah/Selisih Dua Sudut

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \tan\beta}$

B. Sudut Rangkap/Tengahan

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$
- $\sin\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
- $\cos\frac{1}{2}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$
- $\tan\frac{1}{2}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

C. Perkalian Trigonometri

- $2\sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$
- $2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
- $2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$
- $2\sin\alpha \sin\beta = -[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

D. Penjumlahan/Pengurangan Trigonometri

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

E. Menyatakan Bentuk a cos x + b sin x menjadi k cos (x - α)

Bentuk $a\cos x + b\sin x$ dalam bentuk $k\cos(x-\alpha)$.

Dimana, $k=\sqrt{a^2+b^2}$ dan $\tan\alpha=\frac{b}{a}$

Letak α pada suatu kuadran dapat ditentukan dengan melihat tabel berikut:

Tanda a	Tanda b	Letak α
+	+	Kuadran I
-	+	Kuadran II
-	-	Kuadran III
+	-	Kuadran IV

Contoh 3:

(OSP 2011) Jika $\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)\ldots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}$

maka $\sin 2x = \ldots$

Pembahasan:

Kita memakai konsep $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

Perhatikan bahwa:

$$\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)\ldots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}$$

$$\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2009}}\right)\ldots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}}{\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2011}}\right)}=2^{2010}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2010}}.$$

$$\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2009}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2008}}\right)\ldots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{2^{2010}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2010}}}{\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)}=2^{2009}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2009}}.$$

.

.

.

.

.

$$\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=2\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}$$

$$1=\frac{2\sqrt{3}\ \tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\sqrt{3}\tan x$$

Sehingga, $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ *). Dari persamaan *) kita peroleh $x=30^0$

Jadi, $\sin 2x=\sin 60^0=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Contoh 4:

(OSK 2010) Nilai x yang memenuhi $0\le x\le\pi$ dan

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}=2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

Pembahasan:

$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)}=2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$1=2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$1=2^{2009}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)$$

$$1=2^{2008}\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\ldots\sin\left(\frac{x}{2^{2008}}\right)$$

Sehingga kita peroleh $1=\sqrt{2}\sin x\Leftrightarrow\sin x=\sin\frac{\pi}{4}$

Maka $x=\frac{\pi}{4}$ atau $x=\frac{3\pi}{4}$

Jadi, nilai x yang memenuhi adalah $x=\frac{\pi}{4}$ atau $x=\frac{3\pi}{4}$

Contoh 5:

a. Nilai dari $\sin 75^o$ adalah ...

b. Nilai dari $\cos 15^0$ adalah ...

c. Jika $\tan 4^0=p$ maka tentukan nilai dari $\tan 49^0$ dinyatakan dalam p.

Pembahasan:

a. $\sin 75^o=\sin(45^o+30^o)=\sin 45^o\cos 30^o+\cos 45^o\sin 30^o$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

b. $\cos 15^o=\cos(60^o-45^o)=\cos 60^o\cos 45^o+\sin 60^o\sin 45^o$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}.\frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

c. $\tan 49^o = \tan\left(45^o + 4^0\right) = \dfrac{\tan 45^o + \tan 4^0}{1 - \tan 45^0 \tan 4^o} = \dfrac{1+p}{1-p}$

LATIHAN 1B

1. (OSK, 2013) Banyaknya nilai α dengan $0 < \alpha < 90^0$ yang memenuhi persamaan $(1 + \cos\alpha)\,(1 + \cos 2\alpha)\,(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$ adalah ...
2. (AMC12 1999) Misalkan x bilangan real sedemikian sehingga $\sec x - \tan x = 2$. Hitunglah $\sec x + \tan x$.
3. Misalkan $0^0 < \theta < 45^0$. Susunlah bentuk berikut dalam urutan menurun (dari yang besar ke kecil)
   $t_1 = (\tan\theta)^{\tan\theta}, t_2 = (\tan\theta)^{\cot\theta}, t_3 = (\cot\theta)^{\tan\theta}, t_4 = (\cot\theta)^{\cot\theta}$
4. Hitunglah nilai berikut tanpa kalkulator
   a. $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$
   b. $\cos^4\left(\frac{\pi}{24}\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{24}\right)$
   c. $\cos 36^o - \cos 72^o$
   d. $\sin 10^o \sin 50^0 \sin 70^0$
5. (AMC12 2002) Tunjukkan bahwa $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} - \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = \cos 2x$.
6. Hitunglah nilai dari $(1 - \cot 23^0)\,(1 + \cot 22^0)$.
7. Tentukan semua nilai $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ yang memenuhi persamaan $\frac{\sqrt{3}-1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}+1}{\cos x} = 4\sqrt{2}$.
8. Misalkan $f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x)$ untuk $k = 1,2,3, \ldots$.
   Buktikan bahwa $f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{12}$.
9. (AMC12 1999) Dalam segitiga ABC, $3\sin A + 4\cos B = 6$ dan $4\sin B + 3\cos A = 1$. Tentukan ukuran $\angle C$.
10. Buktikan bahwa $\tan 3a - \tan 2a - \tan a = \tan 3a \tan 2a \tan a$ untuk semua $a \neq \frac{k\pi}{2}$, dimana $k \in \mathbb{Z}$.
11. Misalkan a, b, c, d bilangan yang ada dalam interval $[0, \pi]$ sedemikian sehingga $\begin{cases} \sin a + 7\sin b = 4\,(\sin c + 2\sin d) \\ \cos a + 7\cos b = 4\,(\cos c + 2\cos d) \end{cases}$. Buktikan bahwa $\frac{\cos(a-d)}{\cos(b-c)} = \frac{7}{2}$.
12. (AMC12 2002) Diketahui $(1 + \tan 1^0)(1 + \tan 2^0)(1 + \tan 3^0) + \cdots + \tan 45^0 = 2^n$, tentukan nilai n.

LATIHAN 1C

1. (OSP 2009) Jika $\tan x + \tan y = 25$ dan $\cot x + \cot y = 30$, maka $\tan(x + y)$ adalah ....
2. (OSP 2009) Jika $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ bilangan real, maka nilai terkecil dari $\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \ldots + \cos x_{2009} \sin x_1$ adalah ...
3. (OSK 2008) Jika $\sin a + \sin b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, maka $\sin(a + b) = \ldots$.

4. (OSK 2007) Untuk setiap bilangan real x berlaku $\frac{\tan^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sec x} = ...$

   a. $sec\,x + \sin x$
   b. $\sec x - \sin x$
   c. $\cos x + \csc x$
   d. $\cos x - \csc x$
   e. $\cos x + \sin x$
5. (OSK 2005) Nilai $\sin^8 75^o - \cos^8 75^o = ...$
6. (IMO, Seleksi Awal Hongkong/2000) Andaikan $\tan\alpha$ & $\tan\beta$ adalah akar-akar dari $x^2 + \pi x + \sqrt{2} = 0$. Hitunglah $\sin^2(\alpha+\beta) + \pi\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + \sqrt{2}\cos^2(\alpha+\beta)$.

2. GARIS

Pada waktu di SMP, kalian telah mempelajari materi tentang garis lurus. Konsep garis ini banyak digunakan dalam soal-soal kompetisi matematika Nasional maupun Internasional. Dalam buku ini, akana dibahas tentang gradien garis dan menyusun persamaan garis. Untuk topik menentukan titik koordinat garis dan melukis garis singgung diserahkan kepada pembaca untuk mereview secara mandiri.

A. Gradien Garis

Definisi:

Gradien suatu garis adalah tingkat kemiringan suatu garis. Dengan kata lain untuk menentukan besarnya suatu gradien garis dengan cara menghitung perbandingan antara perubahan ordinat dengan perubahan absis dua titik sebarang yang terletak pada garis tersebut.

Perhitungan Gradien:

- ✓ Gradien garis yang melalui dua titik $A(x_a, y_a)$ & $B(x_b, y_b)$ adalah $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$.
- ✓ Persamaan garis $y = mx + c$, mempunyai gradien m.
- ✓ Persamaan garis $ax + by + c = 0$, mempunyai gradien $-\frac{a}{b}$.
- ✓ Gradien garis lurus yang membentuk sudut β terhadap sumbu X positif adalah $tan\,\beta$.

Sifat-Sifat Gradien:

- ✓ Jika garis sejajar dengan sumbu-x maka nilai gradiennya adalah nol.
- ✓ Jika garis sejajar dengan sumbu-y maka garis tersebut tidakmemiliki gradien.
- ✓ Setiap garis yang sejajar memiliki gradien yang sama.
- ✓ Hasil kali antara dua gradien dari garis yang saling tegak lurus adalah –1.

B. Menyusun Persamaan Garis Lurus

- ✓ Persamaan garis lurus yang melalui suatu titik $A(x_1, y_1)$ dan bergradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$.
- ✓ Persamaan garis lurus yang melalui dua titik $A(x_1, y_1)$ & $B(x_2, y_2)$ adalah $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Contoh 1:

(Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2009)

a. Suatu garis mempunyai persamaan $6x + 3y - 21 = 0$. Berapakah gradien garis tersebut?

b. Suatu garis mempunyai gradien 3, melalui titik (1,0) dan (5,c). Berapakah nilai dari c?

Pembahasan:

a. Kita tulis $6x + 3y - 21 = 0$ dalam bentuk $3y = -6x + 21 \Leftrightarrow y = -2x + 7$
Jadi, gradienya adalah -2

b. Karena gradien garisnya adalah 3, maka $\frac{c-0}{5-1} = 3$. Sehingga $c = 12$

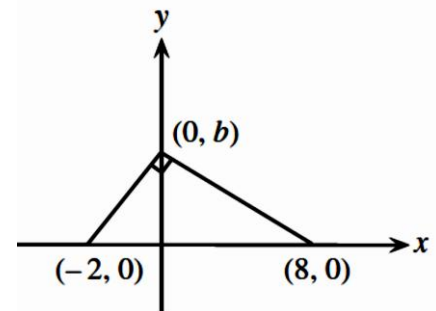
Contoh 2:

(Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/1998) Dua garis saling tegak lurus berpotongan pada titik (0, b) dan masing-masing garis memotong sumbu X di -2 dan 8. Tentukan semua kemungkinan dari b.

Pembahasan:

Jika dua garis saling tegak lurus maka perkalian gradiennya sama dengan -1.

Sehingga $\frac{b}{-8} \cdot \frac{b}{2} = -1$

$b^2 = 16,\ \ b = \pm 4.$

Contoh 3:

(Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2011) Titik (a,2) merupakan titik perpotongan dari garis $y = 2x - 4\ \ \&\ \ y = x + k$. Tentukan nilai dari k.

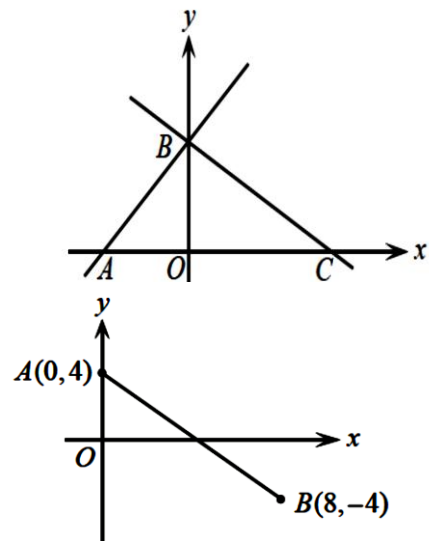
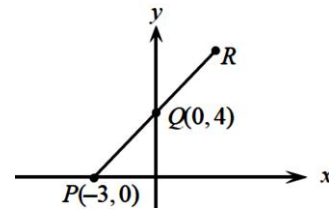
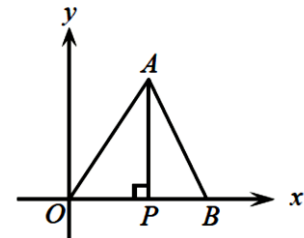
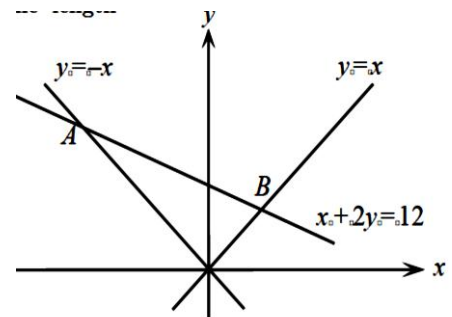
Pembahasan:

Karena (a,2) titik perpotongan garis $y = 2x - 4\ \ \&\ \ y = x + k$., maka koordinat titik perpotongan tersebut memenuhi kedua persamaan garis.
Dengan menggunakan persamaan pertama, 2 =2a-4, a= 3.
Karena koordinat titik perpotongannya (3,2), maka kita substitusikan ke persamaan kedua, 2 = 3 +k, k = -1.

LATIHAN 2

1. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2010) Segitiga ABC dibatasi oleh garis $y = x + 2,\ y = -\frac{1}{2}x + 2,\ \&\ sb - x$. Tentukan luas daerah segitiga ABC.

2. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2009) Titik (k,k) terletak pada ruas garis AB seperti ditunjukkan pada gambar. Tentukan nilai dari k.

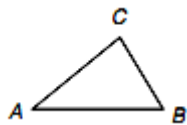
3. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2008) Garis $ax + y = 30$ dan $x + ay = k$ berpotongan pada titik $P(6,12)$. Tentukan nilai dari k.

4. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2007)
   a. Jika titik $(a-1,\ a+1)$ terletak pada garis $y=2x-3,$ berapakah nilai dari a?
   b. Pada gambar berikut, suatu garis digambar melalui titik P, Q, dan R. Jika $PQ=QR,$ berapakah koordinat titik R?

   c. Pada gambar berikut, $OA=15, OP=9, dan\ PB=4$. Tentukan persamaan garis yang melalui titik A dan B.

5. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2006)
   a. Berapakah jumlah dari absis titik potong dengan sumbu x dan ordinat titik potong dengan sumbu y dari persamaan garis $3x-3y=24$?
   b. Jika garis $px=12$ dan $2x+qy=10$ berpotongan pada (1,1), berapakah nilai dari $p+q$?
   c. Pada gambar berikut, garis $x+2y=12$ memotong garis $y=-x\ \&\ y=x$ berturut-turut pada titik A dan B. Berapakah panjang ruas garis AB?

6. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2002) Suatu garis disebut ***CONCURRENT*** jika mereka melalui titik yang sama. Garis $y=2x+3,\ y=8x+15,\ \&\ y=5x+b$ adalah concurrent. Berapakah nilai dari b?
7. (Canadian Mathematics Competition: Euclid Contest/2000) Garis $y=ax+c$ sejajar terhadap garis $y=2x$ dan melalui titik (1,5). Berapakah nilai dari c?
8. (OSP 2012) Diberikan jajar genjang ABCD. Titik M pada AB sedemikian sehingga $\frac{AM}{AB}=0{,}017$ dan titik N pada AD sehingga $\frac{AN}{AD}=\frac{17}{2009}$. Misalkan $AC\cap MN=P,$ maka $\frac{AC}{AP}=\cdots$.
9. (OSK, Bagian Pertama, 2003) Suatu garis melalui titik (m,-9) dan (7,m) dengan kemiringan m. Berapakah nilai m?
10. (OSP, Bagian Pertama, 2003) Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,10, dan (9,1) menjadi daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut?
11. (OSK, 2006) Sebuah garis l_1 mempunyai kemiringan -2 dan melalui titik (p,-3). Sebuah garis lainnya l_2, tegak lurus terhadap l_1 di titik (a,b) dan melalui titik (6,p). Bila dinyatakan dalam p, maka a = ...
12. (OSK, 2006 Tipe1) Sebuah persegi panjang mempunyai titik-titik sudut dengan koordinat(3,1), (6,1), (3,5), dan (6,5). Garis g melalui titik pusat koordinat dan membagi persegi panjang tersebut menjadi dua bagian yang luasnya sama. Kemiringan garis g adalah ...
13. (OSP, 2007, Bagian Pertama) Titik P terletak di kuadran I pada garis $y=x$. Titik

Q terletak pada garis $y = 2x$ demikian sehingga PQ tegak lurus terhadap garis $y = x$ dan PQ = 2. Maka koordinat Q adalah ...

14. (OSP, 2007, Bagian Pertama) Absis titik potong garis l dengan sumbu-x dan ordinat titik potong l dengan sumbu-y adalah bilangan-bilangan prima. Jika l juga melalui titik (3,4), persamaan l adalah ...
15. (OSP, 2008, Bagian Pertama) Dalam bidang XOY, banyaknya garis yang memotong sumbu X di titik dengan absis bilangan prima dan memotong sumbu Y di titik dengan ordinat bilangan bulat positif serta melalui titik (4, 3) adalah ·····

3. SEGITIGA

A. Definisi Segitiga

Segitiga adalah bangun datar yang memilik tiga sisi dan tiga sudut di dalamnya. Simbol untuk segitiga adalah Δ. Suatu segitiga dinamai dengan tiga huruf pada titik sudutnya. Pada gambar di bawah ini merupakan segitiga ABC.

Gambar 1

B. Sifat-Sifat Segitiga

Jumlah Ukuran Sudut dari Segitiga

Jumlah ukuran sudut dalam dari sebarang segitiga adalah 180^0.

Untuk simbol ukuran sudut A dalam buku ini kita gunakan simbol $\angle A$.

Pada gambar 1 di atas, maka kita peroleh $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$.

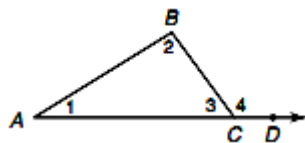
Contoh 1:

Pada segitiga ABC, diketahui $\angle A = 40^o$ & $\angle B = 60^o$. Tentukan ukuran sudut C.

Pembahasan:

Karena $\angle A + \angle B + \angle C = 180^o$, maka $\angle C = 180^o - (\angle A + \angle B) = 180^0 - 100^0 = 80^0$

Sudut Luar dari Segitiga (*Exterior Angle*)

Sudut ini dibuat dengan memperpanjang salah satu sisi segitiga. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar berikut.

Gambar 2

Dari gambar di atas, maka sudut 4 atau sudut BCD adalah sudut luar segitiga ABC. Dan besarnya sudut luar BCD adalah $\angle A + \angle B$ atau $\angle 1 + \angle 2$. Atau secara umum, perhatikan teorema berikut:

Sudut luar suatu segitiga besarnya sama dengan jumlah ukuran dua sudut dalam segitiga yang tidak berdekatan

Contoh 2:

Pada gambar 2 di atas, diketahui $\angle 1 = 30^0$ & $\angle 2 = 100^0$, tentukan $\angle 4$.

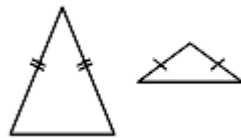
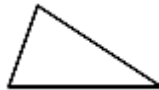
Pembahasan:

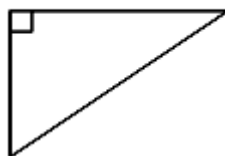
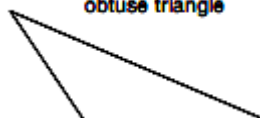
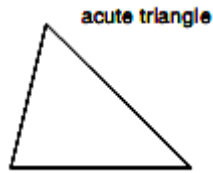
Karena $\angle 4$ adalah sudut luar segitiga ABC, $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 = 30^0 + 100^0 = 130^0$.

C. Jenis-Jenis Segitiga

Jenis Segitiga Berdasarkan Ukuran Sisinya

✓ Segitiga Sama Sisi (*Equilateral Triangle*)
Suatu segitiga dimana semua sisinya ukuranya sama.

✓ Segitiga Sama Kaki (*Isosceles Triangle*)
Suatu segitiga yang memiliki sedikitnya dua sisi yang mempunyai ukuran yang sama.

✓ Segitiga Sebarang (*Scalene Triangle*)
Suatu segitiga dimana ketiga sisinya ukuran berbeda.

Jenis Segitiga Berdasarkan Ukuran Sudutnya

✓ Segitiga Siku-Siku (*Right Triangle*)
Suatu segitiga yang memiliki sudut siku-siku pada sudut dalamnya.

✓ Segitiga Tumpul (*Obtuse Triangle*)
Suatu segitiga yang memiliki sudut tumpul pada sudut dalamnya.

✓ Segitiga Lancip (*Acute Triangle*)
Suatu segitiga yang memiliki kesemua ukuran sudut dalamnya adalah sudut lancip.

LATIHAN 3A-C

1. (OSK, 2005, Bagian Pertama) Pada gambar di samping, a, b, c, d, dan e berturut-turut menyatakan besar sudut pada titik-titik ujung bintang lima yang terletak pada suatu lingkaran. Jumlah $a+b+c+d+e=$
   a. 135^o d. 360^0
   b. 180^o e. tidak dapat ditentukan dengan pasti
   c. 270^o
2. (OSP, 2005, Bagian Pertama) Jika AB = AC, AD = BD dan besar sudut DAC = 39^o, maka besar sudut BAD adalah ....

3. (OSP, 2006, Bagian Pertama) Dari titik o ditarik dua setengah garis (sinar) l_1 dan l_2 yang membentuk sudut lancip α. Titik-titik berbeda A_1,A_3,A_5 terletak pada l_2, sedangkan titik-titik A_2, A_4, A_6 terletak di l_1. Jika $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4O=OA_5=A_5A_6=A_6A_1$, maka α sama dengan ...
4. (OSK, 2007) Pada segitiga PQR samasisi diberikan titik-titik S dan T yang terletak berturut-turut pada sisi QR dan PR demikian rupa, sehingga $\angle SPR = 40^o, \angle TQR = 35^o$. Jika titik X adalah perpotongan garis-garis PS dan Qt, maka $\angle SXT = \cdots$.
5. (OSK, 2010) Diberikan segitiga ABC, AB = AC. Jika titik P diantara A dan B sedemikian rupa sehingga AP = PC = CB, maka besarnya sudut A adalah ......

D. Teorema Sinus & Cosinus

Diketahui segitiga ABC, panjang sisi BC, CA, AB berturut-turut dinotasikan dengan a, b, dan c.

Aturan Sinus:

Dalam segitiga ABC, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Dimana R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga ABC

Aturan Cosinus:
Dalam segitiga ABC, berlaku

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Contoh 1:

(OSK, Bagian Kedua/2002) Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Berapakah perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC?

Pembahasan:

$\angle C = 3\angle A \quad \angle B = 2\angle A \quad (*)$

Dalam segitiga berlaku $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0 \quad (**)$

Dari (*) dan (**), maka $\angle A = 30^0 \quad \& \quad \angle C = 90^0$

Dengan menggunakan aturan sinus pada segitiga ABC:

$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A}, \quad \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 90^0}{\sin 30^0} = 2.$

Contoh 2:

(OSK, Bagian Kedua/2003) Segitiga ABC adalah segitiga samasisi dengan panjang sisi 1 satuan.Melalui B dibuat garis yang tegak lurus BC. Garis tersebut berpotongan dengan perpanjangan garis AC di titik D. Berapakah panjang BD?

Pembahasan:

Karena segitiga ABC adalah sama sisi, maka $\angle CBA = 60^0$.

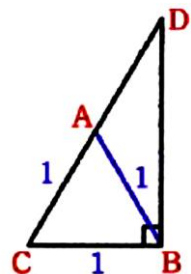
Hal ini berakibat $\angle ABD = 30^0$.

- ✓ $\angle BAD = 180^0 - \angle BAC = 120^0$
- ✓ $\angle BDA = 180^0 - 30^0 - 120^0 = 30^0$

Alternatif 1:

Dengan menggunakan aturan sinus pada segitiga ABD:

$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AB}{\sin\angle BDA} \Rightarrow \frac{BD}{\sin 120^0} = \frac{1}{\sin 30^0}$

$BD = \sqrt{3}$

Alternatif 2:

Perhatikan bahwa segitiga ABD segitiga sama kaki dengan AD = AB = 1.

Dengan menggunakan aturan cosinus pada segitiag ABD:

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2.AD.AB\cos\angle BAD$

$BD = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^0}$

$BD = \sqrt{2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3}.$

LATIHAN 3D

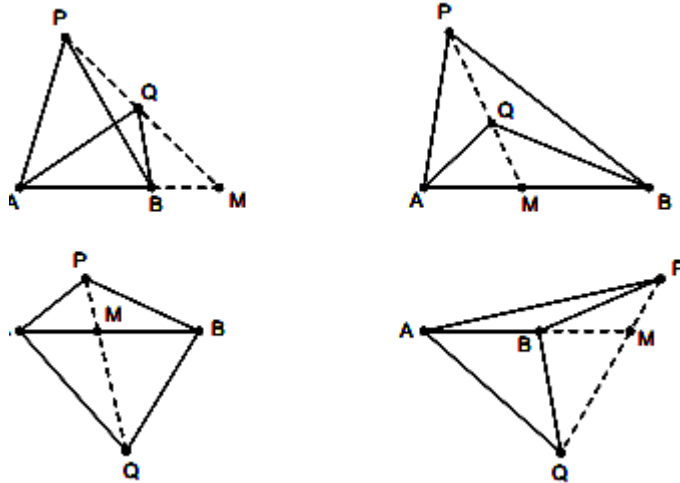
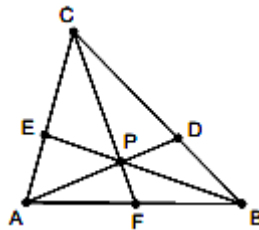
1. (OSK, 2013) Misalkan P adalah titik interior dalam daerah segitiga ABC sehingga $\angle PAB = 10^o$, $\angle PBA = 20^0$, $\angle PCA = 30^o$, & $\angle PAC = 40^o$. Besar $\angle ABC$ adalah ...
2. (OSP, 2013) Misalkan M adalah titik tengah sisi BC pada segitiga ABC dan $\angle CAB = 45^0$, $\angle ABC = 30^0$, maka $\tan \angle AMC$ adalah ...
3. (OSP, 2013) Diberikan segitiga ABC, AB = 20, AC = 21, dan BC =29. Titik D dan E terletak pada segmen BC, sehingga BD = 8 dan EC = 9. Besarnya sudut DAE sama dengan ....
4. (OSP, 2008, Bagian Pertama) Diberikan segitiga ABC, dengan BC = a, AC = b dan $\angle C = 60^o$. Jika $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, maka besarnya sudut B adalah ⋯⋯
5. (OSP, 2008, Bagian Pertama/OSP 2010) Diberikan segitiga ABC, dengan BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D dan E berturut-turut pada AB dan AC sedemikian rupa sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Panjang minimum DE adalah ⋯⋯
6. (OSP, 2008, Bagian Pertama) Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi a, b, dan c. Nilai $a^2 + b^2 + c^2$ sama dengan 16 kali luas segitiga ABC. Besarnya nilai ctg A + ctg B + ctg C adalah ⋯⋯
7. (OSK, 2009, Tipe 1) Diberikan segitiga ABC tumpul ($\angle ABC > 90^o$), AD dan AE membagi sudut BAC sama besar. Panjang segmen garis BD, DE dan EC berturut-turut adalah 2, 3, dan 6. Panjang terpendek dari sisi segitiga ABC adalah ⋯⋯
8. (OSK, 2010) Suatu segitiga ABC, dimana AB, BC dan CA berturut-turut memiliki panjang 7, 8, 9. Jika D merupakan titik tinggi dari B, tentukan panjang AD.
9. (OSP, 2010, Bagian Pertama) Pada segitiga ABC dimisalkan a, b, dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA, dan AB. Jika $\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$. Maka nilai $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A + \cos^2 B}$ adalah ....
10. (OSP, 2010, Bagian Pertama) Jika a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi (a + b + c)(a + b − c) = 3ab, maka besar sudut yang menghadapi sisi dengan panjang c adalah ⋯⋯⋯

E. Teorema Ceva, Menelaus, & Stewart

Sebelum kita bahas tentang Dalil menelaus, kita bahas dahulu teorema tentang perbandungan luas:

Teorema

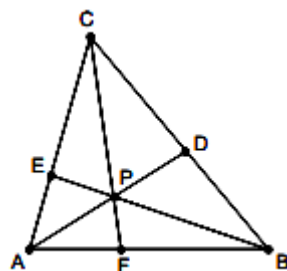
Jika garis AB, PQ berpotongan di M, maka $\frac{[ABP]}{[ABQ]} = \frac{PM}{QM}$.

Dari terorema di atas, maka berikut ilustrasi gambarnya:

Contoh 1:
Misalkan P titik di dalam segitiga ABC, sinar garis AP, BP, CP memotong sisi BC, CA, AB berturut-turut di titik D, E, dan F. Buktikan bahwa $\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$.

Pembahasan:
$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{[PBC]}{[ABC]}+\frac{[APC]}{[ABC]}+\frac{[ABP]}{[ABC]}=\frac{[ABC]}{[ABC]}=1.$

Kita sekarang akan membahas dua teorema penting (convers nya) dalam geometri dasar, yakni merupakan alat yang luar biasa untuk membuktikan tentang titik-titik yang kolinear dan garis-garis yang konkuren.

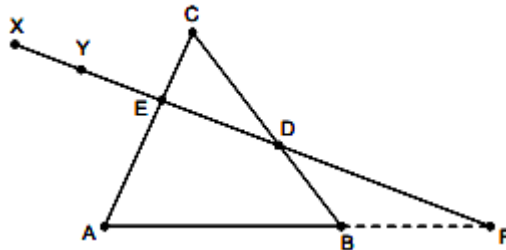
Teorema Ceva

Misalkan segitiga ABC dan D, E, F berturut-turut merupakan titik-titik pada BC, CA, dan AB. Jika AD, BE, CF adalah konkuren (yakni, bertemu pada satu titik P), maka

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

Teorema Kebalikan/Convers Ceva

Misalkan segitiga ABC dan D, E, F berturut-turut merupakan titik-titik pada BC, CA, dan AB. Jika $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, maka AD, BE, CF adalah konkuren (yakni, bertemu pada satu titik P),

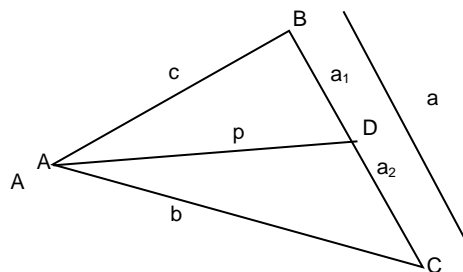
Teorema Menelaus

Misalkan segitiga ABC dan D, E, F berturut-turut titik pada garis BC, CA, AB. Jika D, E, F kolinear/segaris, maka $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

Teorema Kebalikan Menelaus

Misalkan segitiga ABC dan D, E, F berturut-turut titik pada garis BC, CA, AB. Jika $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$, maka D, E, F kolinear/segaris

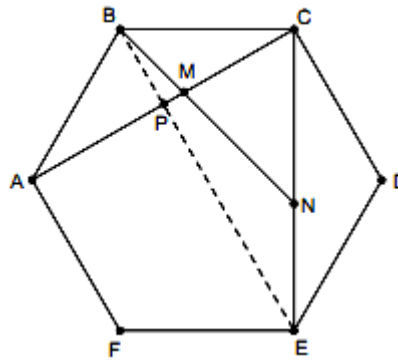
Teorema Stewart

Misalkan ABC sebuah segitiga dan titik D pada sisi BC. Maka

$$ap^2 = a_1 b^2 + a_2 c^2 - a_1 a_2 a$$

(Untuk bukti, dalil stewart gunakan konsep aturan kosinus)

Contoh 2:

(IMO, 1982-5) Diagonal AC dan CE dari segi enam beraturan ABCDEF dibagi berturut-turut oleh titik M dan N (M & N di dalam segi enam), sehingga $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r$. Tentukan r jika B, M, N segaris.

Pembahasan:

Hubungkan BE yang memotong AC di P. Dengan menggunakan teorema menelaus pada segitiga CPE dan garis BMN, kita peroleh:

$$\frac{CM}{MP}.\frac{PB}{BE}.\frac{EN}{NC}=1.$$

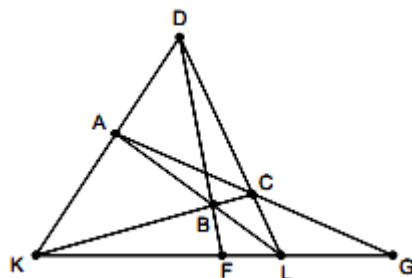
Perhatikan bahwa:

(i) $\frac{CM}{MP}=\frac{1-r}{r-\frac{1}{2}}=\frac{2-2r}{2r-1}$; (ii) $PB=AB\cos\angle ABP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{4}BE \Rightarrow \frac{PB}{BE}=\frac{1}{4}$;

(iii) $\frac{EN}{NC}=\frac{1-r}{r}$.

Substitusikan (i), (ii), (iii) ke (*), $\frac{2-2r}{2r-1}.\frac{1}{4}.\frac{1-r}{r}=1$. Sehingga kita peroleh $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Contoh 3:

Gambar berikut merupakan segiempat konvek ABCD. Garis DA dan CB berpotongan di K, garis AB dan DC berpotongan di L, garis AC dan KL berpotongan di G, garis DB dan KL berpotongan di F. Buktikan bahwa $\frac{KL}{FL}=\frac{KG}{GL}$.

Pembahasan:

Dengan menggunakan teorema ceva untuk segitiga DKL dan titik B, kita peroleh:

$$\frac{DA}{AK}.\frac{KF}{FL}.\frac{LC}{CD}=1. \qquad (*)$$

Dengan menggunakan teorema Menelaus untuk segitiga DKL dan garis ACG, kita peroleh:

$$\frac{DA}{AK}.\frac{KG}{GL}.\frac{LC}{CD}=1. \qquad (**)$$

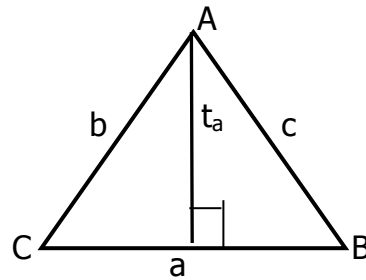
Bagilah (*) oleh (**), kita peroleh $\frac{KL}{FL}=\frac{KG}{GL}$.

F. Garis-Garis pada Segitiga

Ada empat garis yang akan di bahas di buku ini:

a. Garis Tinggi

Merupakan ruas garis yang ditarik dari salah satu titik sudut segitiga dan memotong tegak lurus sisi dihadapannya.

Perhatikan gambar segitiga ABC berikut:

Misalkan t_a, t_b, dan t_c berturut-turut menyatakan garis tinggi segitiga ABC yang ditarik dari titik A, B, dan C. Ada dua hal yang dapat kita bahas tetang garis tinggi pada segitiga ABC.

$$t_a : t_b : t_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

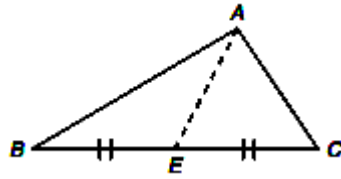
- $t_a = \frac{2}{a} Z$
- $t_b = \frac{2}{b} Z$
- $t_c = \frac{2}{c} Z$

Dimana $Z=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ & $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

(*Kepada pembaca, silahkan dibuktikan rumus di atas*)

Sifat-sifat garis tinggi

- Ketiga garis tinggi suatu segitiga bertemu di satu titik
- Misalkan t_a garis tinggi maka $t_a \perp BC$

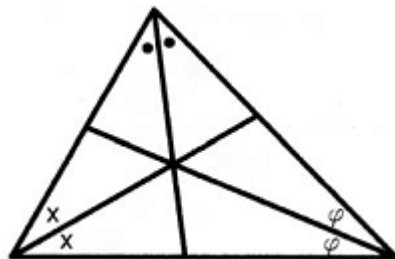
b. Garis Berat
Merupakan ruas garis dari yang ditarik dari titik sudut ke titik tengah sisi dihadapannya. Setiap segitiga memeiliki tiga garis berat/median. Perhatikan gambar berikut:

Titik E titik tengah BC. Jadi, $BE = EC$ sehingga AE garis berat segitiga ABC.

Sifat-sifat garis berat

- Ketiga garis berat berpotongan di satu titik
- Titik berat segitiga ABC merupakan perpotongan ketiga garis berat. Misalkan titik sudut segitiga ABC adalah $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, maka koordinat titik berat segitiga ABC adalah $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
- Misalkan garis berat segitiga ABC (AK, BL, CM) berpotongan di titik Z, maka $AZ : ZK = BZ : ZL = CZ : ZM = 2:1$

Dengan menggunakan dalil stewart, maka kita dapat menentukan panjang garis berat. Perhatikan segitiga ABC di atas dimna AE adalah garis berat atau kita simbolkan dengan z_a.

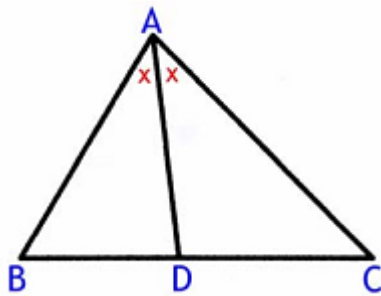
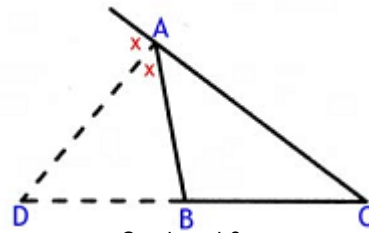
$$Z_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

c. Garis Bagi
Merupakan ruas garis yang ditarik dari salah satu titik sudut dan membagi sudut tersebut menjadi dua bagian yang sama besar.

Sifat-sifat garis bagi

- Ketiga garis bagi berpotongan di satu titik
- Misalkan segitiga ABC dan garis bagi dibuat dari titik sudut A dan memotong sisi BC di D (Gambar gb1), maka berlaku:

  $$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \quad \text{dan}$$

  $$AD^2 = bc - BD.DC$$
- Misalkan segitiga ABC dan garis bagi dibuat dari titik sudut A dan memotong perpanjangan sisi BC di D (Gambar gb2), maka berlaku:

  $$\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$$

Gambar gb1

Gambar gb2

LATIHAN 3F

1. (OSP, 2004, Bagian Pertama/OSK 2010) Diberikan segitiga ABC dengan perbandingan panjang sisi AC : CB = 3 : 4. Garis bagi sudut luar C memotong perpanjangan BA di P (titik A terletak di antara titik-titik P dan B). Tentukan perbandingan panjang PA : AB.
2. (OSP, 2006, Bagian Pertama) Pada segitiga ABC, garis bagi sudut A memotong sisi BC di titik D. Jika AB = AD = 2 dan BD = 1, maka CD = ...
3. (OSP, 2006, Bagian Pertama) Pada segitiga ABC, garis-garis berat dari titik sudut B dan titik sudut C saling berpotongan tegak lurus. Nilai minimum $ctg\ A + ctg\ C$ adalah ....
4. (OSK, 2007) Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, AE dan BF adalah garis-garis berat (median). Maka $\frac{|AE|^2+|BF|^2}{|AB|^2} = \cdots$
5. (OSK, 2008) Segitiga ABC sama kaki, yaitu AB = AC, dan memiliki keliling 32. Jika panjang garis tinggi dari A adalah 8, maka panjang AC adalah
6. (OSP, 2008) Dua dari panjang garis tinggi segitiga ABC lancip, berturut-turut sama dengan 4 dan 12. Jika panjang garis tinggi yang ketiga dari segitiga tersebut merupakan bilangan bulat, maka panjang maksimum garis tinggi segitiga tersebut adalah ……

7. (OSK, 2009, Tipe 1)Diketahui ABC adalah segitiga siku-siku di A dengan AB = 30 cm dan AC = 40 cm. Misalkan AD adalah garis tinggi dari dan E adalah titik tengah AD. Nilai dari BE + CE adalah …….
8. (OSP, 2009, Bagian Pertama) Diberikan segitiga dengan panjang dari ketiga garis tinggi segitiga itu merupakan bilangan bulat. Jika panjang kedua garis tingginya adalah 10 dan 6, maka panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah ……
9. (OSP, 2011) Diberikan segitiga samakaki ABC dengan AB = AC. Misalkan garis bagi sudut ABC memotong AC di titik D sehingga BC = BD + AD. Besar sudut CAB adalah ……

G. Kekongruenan & Kesebangunan Segitiga

Kekongruenan Pada Segitiga

Dua segitiga disebut **kongruen** jika dan hanya jika bentuk dan ukurannya sama.

Dalam geometri, kekongruenan segitiga sangat penting dan alat dasar untuk membuktikan kesamaan relasi atau ketaksamaan relasi dari dua element geometri. (contoh: dua ruas garis, dua sudut, jumlah dua sisi, selisih dua sudut, dll).

Kriteria Dasar untuk Dua segitiga yang Kongruen

Dua segitiga dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat berikut:

- **S.A.S.**: Dua sisi dan satu sudut yang diapit sama.
- **A.A.S.**: Satu sisi dan dua sudut yang satu pada sisi itu dan satunya didepannya sama.
- **S.S.S.**: Ketiga sisinya sama.
- **A.S.A.**: Satu sisi dan dua sudut pada sisi itu sama.

Untuk dua segitiga siku-siku, dikatakan kongruen jika memenuhi salah satu syarat:

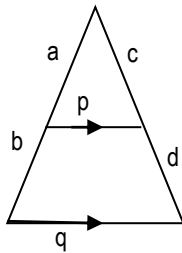
- **S.A.**: Satu sisi dan satu sudutnya lancip adalah sama.
- **S.S.**: Kedua sisinya sama.

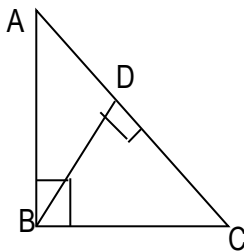
Kesebangunan Pada Segitiga

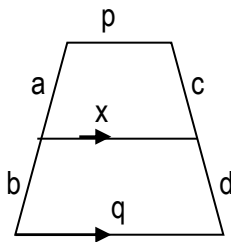
Dua segitiga disebut **sebangun** jika kita dapat memperoleh dua segitiga kongruen setelah memperbesar atau memperkecil ukuran sisi dari salah satu segitiga dengan rasio yang sama.

Kriteria Dasar untuk Dua segitiga yang Sebangun

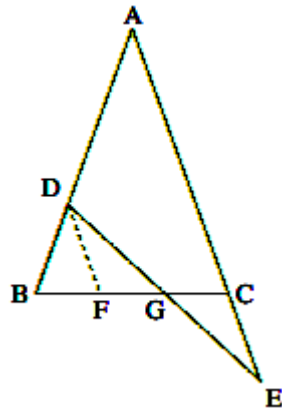
Dua segitiga dikatakan sebangun jika memenuhi salah satu syarat berikut:
- **A.A.A.**: Sudut-sudut yang bersesuai sama besar
- **S.S.S.**: Sisi-sisi yang bersesuaian mempunyai perbandingan yang sama.
- **A.S.A.**: Satu sisi dan dua sudut pada sisi itu sama.

Beberapa Hasil dari Konsep Dasar Dua segitiga Sebangun

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{p}{q-p}$
- $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{p}{q}$

Jika segitiga ABC siku-siku di B dan BD tegak lurus AC, maka:

- $BC^2 = CD.CA$
- $BA^2 = AD.AC$
- $BD^2 = DA.DC$

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- $x = \frac{p.b + q.a}{a+b}$

Contoh 1:

Perhatikan gambar di bawah ini, Diketahui segitiga ABC, AB=AC, D pada AB dan E pada perpanjangan AC sedemikian hingga BD=CE. Ruas garis DE memotong BC pada G. Buktikan bahwa DG=GE.

Pembahasan:

Dari titik D buat garis sehingga memotong BC di F dan $DF \parallel AE$, Maka

$\angle FDG = \angle CEG, \angle DGF = \angle EGC$.

Karena, $\angle BFD = \angle BCA = \angle DBF$, kita peroleh:

$$DF = DB = CE.$$

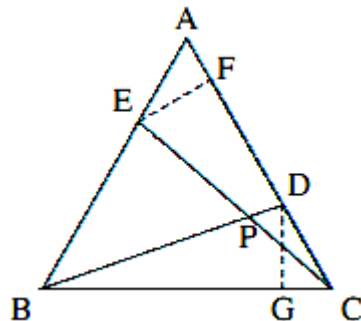
Sehingga, $\Delta DFG \cong \Delta ECG \ (A.A.S)$

Jadi, DG=GE. (terbukti).

Contoh 2:

(CHINA/1992) Dalam segitiga samasisi ABC, titik D dan E berturut-turut pada AC dan AB, sedemikian sehingga BD dan CE berpotongan di P, dan luas dari segiempat ADPE sama dengan luas segitiga BPC. Tentukan $\angle BPE$.

Pembahasan:

Dari titik E dan D tarik garis berturut-turut memotong AC di F dan BC di G sehingga $EF \perp AC$ dan $DG \perp BC$.

Dari kondisi yang diketahui bahwa $[ADPE] = [BPC]$, maka ini berakibat:

$$[ACE] = [CBD].$$

Karena AC=BC, maka EF=DG. Karena $\angle A = \angle C$, maka $\Delta AEF \cong \Delta CDG \ (A.S)$, sehingga kita peroleh AE=CD. Berdasarkan aturan (S.A.S), maka $\Delta AEC \cong \Delta CDB$. Jadi, $\angle DBC = \angle ECD$, sehingga

$$\angle BPE = \angle PBC + \angle PCB = \angle PCD + \angle PCB = 60^o.$$

Contoh 3:

(MOSCOW/1972) Dalam segitiga ABC, AD, BE berturut-turut adalah medians/garis berat pada BC, AC. Jika $\angle CAD = \angle CBE = 30^o$, buktikan bahwa segitiga ABC sama sisi.

Pembahasan:

Berdasarkan (A.A.A), maka $\Delta ADC \sim \Delta BEC$ sehingga kita peroleh:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{DC}{EC}=\frac{2DC}{2EC}=\frac{BC}{AC},$$

$\therefore AC^2 = BC^2,\ AC = BC.$

Dalam segitiga BEC, $\angle BEC = 30^o, EC = \frac{1}{2}BC,$

$\therefore\ \angle BEC = 90^0, \angle C = 60^0$

$\therefore\ \Delta ABC$ sama sisi. (terbukti)

LATIHAN 3G

1. (OSK, Tipe 3/2012) Diberikan suatu persegi panjang ABCD dan titik H berada pada diagonal AC sehingga DH tegak lurus AC. Jika panjang AD=15 cm, DC=20 cm, maka panjang HB adalah ...
2. (OSK, Tipe 1, 2, 3/2012) Diberikan segitiga siku-siku ABC, dengan AB sebagai sisi miringnya. Jika keliling dan luasnya berturut-turut 624 dan 6864. Panjang sisi miring segitiga tersebut adalah ...
3. (OSK, Bagian Kedua/2002) Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD?
4. (OSP 2012) Pada segitiga ABC titik D terletak pada garis BC. Panjang BC = 3, BD= 1, $\angle ABC = 30^0, \& \angle ADC = 45^0$. Panjang AC = ...
5. (OSP 2012) Diberikan segitiga ABC, dengan panjang AB sama dengan dua kali panjang AC. Misalkan D dan E berturut-turut pada ruas garis AB dan BC, sehingga $\angle BAE = \angle ACD$. Jika $F = AE \cap CD$ dan CEF merupakan segitiga sama sisi, maka besar sudut dari segitiga ABC adalah ...
6. (OSP, 2007, Bagian Pertama) Diberikan segitiga ABC siku-siku di A, titik D pada AC dan titik F pada BC. Jika $AF \perp BC$ dan $BD = DC = FC = 1$, maka AC = ...

H. Luas Segitiga & Aplikasinya

Rumus Dasar untuk Luas Segitiga

Luas dari segitiga UVW dinotasikan $[UVW]$.

Untuk segitiga ABC, $[ABC] = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.b\,h_b = \frac{1}{2}.c.h_c$, dimana BC=a, CA=b, AB=c dan h_a, h_b, h_c berturut-turut tinggi pada BC, CA, AB.

(**Rumus Heron**), Untuk segitiga ABC, $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dimana $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

(**Rumus Heron**), Untuk segitiga ABC,

$$[ABC]=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

Sifat-Sifat Luas Segitiga

- Untuk masing-masing segitiga, misalkan $S=h.b$, dimana b alas suatu segitiga dan h tinggi pada alas tersebut. Maka perbandingan luas dari sebarang dua segitiga sama dengan rasio dari S yang bersesuaian.
- Untuk dua segitiga yang memiliki alas yang sama, rasio luasnya sama dengan rasio dari tinggi masing-masing segitiga pada alas masing-masing.
- Untuk dua segitiga dengan tinggi yang sama, maka rasio luasnya sama dengan rasio masing-masing alasnya.
- Jika dua segitiga mempunyai sepasang sudut yang sama, maka rasio luasnya sama dengan rasio perkalian dari dua sisi dari sudut yang sama tadi.

Contoh 1:

(SMO/1988) Andaikan luas segitiga ABC = 10 cm^2, AD = 2 cm, DB= 3 cm dan luas segitiga ABE sama dengan luas segiempat DBEF. Maka luas segitiga ABE sama dengan ....

Pembahasan:

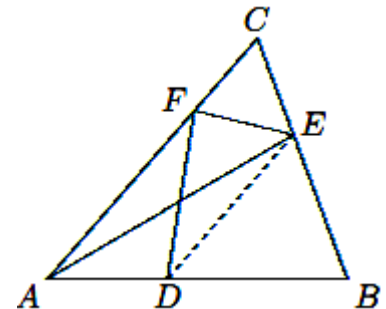
Hubungkan DE. Karena $[ABE]=[DBEF]$, kita peroleh

$$[ADE]=[ABE]-[DBE]=[DBEF]-[DBE]=[FDE]$$

$$\therefore\ AC \parallel DE,$$

$\therefore\ CE:EB=AD:DB=2:3$.

$$\therefore \frac{[ABE]}{[ABC]}=\frac{BE}{BC}=\frac{3}{5},$$

$\therefore [ABE]=\frac{3}{5}.[ABC]=6.$

Contoh 2:

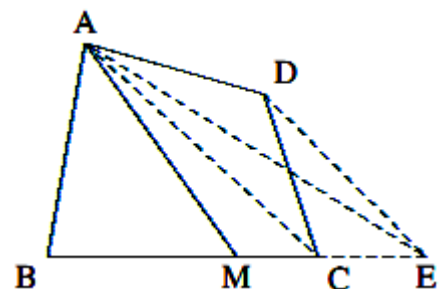
Pada gambar di samping ini, ABCD adalah segi empat konveks. Tentukan posisi titik M pada ruas garis BC sehingga AM membagi ABCD menjadi dua bagian yang luasnya sama.

Pembahasan:

Dari titik D buat garis, $ED \parallel AC$ sehingga DE

memotong perpanjangan BC di E. Maka $[DAC]=[EAC]$, $\therefore [ABCD]=[EAB]$

Sekarang buat titik M di tengah ruas garis BE, maka

$$[ABM]=[AEM]=\frac{1}{2}[ABCD]=[AMCD].$$

Contoh 3:

(OSP, 2002) Segitiga ABC memiliki panjang sisi AB = 10, BC = 7, dan CA = 12. Jika setiap sisi diperpanjang menjadi tiga kali panjang semula, maka segitiga yang

terbentuk memiliki luas berapa kali luas segitiga ABC?

Pembahasan:

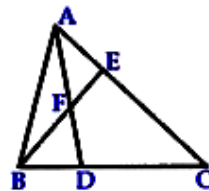
Misal luas segitiga semula dan akhir berturut-turut $[ABC]$ & $[A'B'C']$.

$[ABC] = \frac{1}{2}.ab \sin \angle C$

$[A'B'C'] = \frac{1}{2}(3a)(3b) \sin \angle C = 9\ \frac{1}{2}ab\ \sin \angle C = 9.[ABC]$

Jadi, perbandingan luas segitiga akhir dengan luas segitiga semula adalah 9.

LATIHAN 3H

1. (OSK, 2013) Diberikan segitiga ABC dengan luas 10. Titik-titik D, E, dan F berturut-turut terletak pada sisi-sisi AB, BC, dan CA dengan AD = 2, DB = 3. Jika segitiga ABE dan segiempat DBEF mempunyai luas yang sama, maka luasnya sama dengan ....
2. (OSP, 2013) Diberikan tiga lingkaran dengan radius r=2, yang saling bersinggungan. Total luas dari ketiga lingkaran tersebut berikut daerah yang dibatasinya sama dengan ....
3. (OSK, Tipe 3/2011) Diketahui segitiga ABC, titik D dan E berturut-turut pada sisi AB dan AC, dengan panjang $AD = \frac{1}{2}BD$ dan $AE = \frac{1}{2}CE$. Garis BE dan CD berpotongan di titik F. Diketahui luas segitiga ABC adalah 90 cm^2. Luas segiempat ADEF adalah ....
4. (OSK, Tipe 1/2012) Diketahui segitiga ABC sama kaki dengan panjang $AB = AC = 3, BC = 2,$ titik D pada sisi AC dengan panjang $AD = 1$. Tentukan luas segitiga ABD.
5. (OSP, 2011) Pada gambar di bawah ini, panjang $AE = x, EC = y, \& DC = 2BD$. Perbandingan panjang BF dan FE dinyatakan dalam x dan y adalah ....

6. (OSK, 2010) AB, BC, dan CA memiliki panjang 7, 8, 9 berturut-turut. Jika D merupakan titik tinggi dari B, tentukan panjang AD.
7. (OSP, 2009) Diberikan segitiga ABC dengan $\tan \angle CAB = \frac{22}{7}$. Melalui titik sudut A ditarik garis tinggi sedemikian rupa sehingga membagi sisi BC menjadi segmen-segmen dengan panjang 3 dan 17. Luas segitiga ABC adalah ...
8. (OSP, 2008) Diberikan segitiga ABC, AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga DC=2 dan BD=3. Jika $\angle BAC = 45^0$, maka luas segitiga ABC adalah ....
9. (OSP, 2008) Diketahui AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC, $\angle DAB = \angle ACD$, $AD = 6, BD = 8.$ Luas segitiga ABC adalah ...
10. (OSK, 2007) Keliling sebuah segitiga adalah 8.Jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan bulat,maka luas segitiga tersebut sama dengan....
11. (OSK, 2006) Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan ....

12. (OSK, 2006) Pada segitiga ABC yang tumpul di C, titik M adalah titik tengah AB. Melalui titik C dibuat garis tegak lurus pada BC yang memotong AB di titik E. Dari M ditarik garis memotong BC tegak lurus di D. Jika luas segitiga ABC adalah 54 satuan luas, maka luas segitiga BED adalah ....
13. (OSK, 2004, Bagian Pertama) Segitiga dengan panjang sisi 6 dan 8 memiliki luas terbesar jika sisi ketiganya memiliki panjang ....
    a. 6
    b. 8
    c. 10
    d. 12
    e. 15
14. (OSK, 2004, Bagian Kedua) Luas sebuah segitiga siku-siku adalah 5. Panjang sisi miring segitiga ini adalah 5. Maka keliling segitiga tersebut adalah ....
15. (OSK, 2009, Tipe1) Titik E terletak di dalam persegi ABCD sedemikian rupa sehingga ABE adalah segitiga sama sisi. Jika panjang AB = $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dan F titik potong antara diagonal BD dengan segmen garis AE, maka luas segitiga ABF sama dengan ⋯⋯
16. (OSP, 2005) Keliling sebuah segitiga samasisi adalah p. Misalkan Q adalah sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari Q ke ketiga sisi segitiga adalah s, maka, dinyatakan dalam s, p = · · · · ·
17. (OSP, 2004) Pada sisi-sisi SU, TS, dan UT dari segitiga STU dipilih titik-titik P,Q, dan R berturut-turut sehingga $SP=\frac{1}{4}SU$, $TQ=\frac{1}{2}TS$, dan $UR=\frac{1}{3}UT$. Jika luas segitiga STU adalah 1, berapakah luas segitiga PQR?
18. (OSP, 2003) Dalam sebuah segitiga ABC siku-siku sama kaki, dibuat persegi PQRS sebagai berikut : Titik P pada sisi AB, titik Q pada sisi AC, sedangkan titik-titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas segitiga ABC adalah x, berapakah luas persegi PQRS ?
19. (OSP, 2002) Sebuah segitiga samasisi, sebuah lingkaran, dan sebuah persegi memiliki keliling yang sama. Di antara ketiga bangun tersebut, manakah yang memiliki luas terbesar?
20. (OSP, 2005, Bagian Pertama) Keliling sebuah segitiga samasisi adalah p. Misalkan Q adalah sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari Q ketiga sisi segitiga adalah 2, maka, dinyatakan dalam s, p = ...
21. (OSP, 2007, Bagian Pertama) Panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku sama dengan dua kali panjang sisi terpendeknya, sedangkan panjang sisi ketiga 1 satuan panjang lebih panjang dari panjang sisi terpendeknya. Luas segitiga itu adalah .... satuan luas.
22. (OSP, 2008, Bagian Pertama) Diberikan segitiga ABC, AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga DC = 2 dan BD = 3. Jika ∠BAC = 45^{o}, maka luas segitiga ABC adalah ⋯⋯
23. (OSP, 2008, Bagian Pertama) Diketahui AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC, ∠DAB = ∠ACD, AD = 6, BD = 8. Luas segitiga ABC adalah ⋯⋯
24. (OSP, 2009, Bagian Pertama) Diberikan segitiga ABC dengan tan ∠CAB = $\frac{22}{7}$. Melalui titik sudut A ditarik garis tinggi sedemikian rupa sehingga membagi sisi BC menjadi segmen-segmen dengan panjang 3 dan 17. Luas segitiga ABC adalah ⋯⋯⋯

I. KETAKSAMAAN SEGITIGA

Dalam suatu segitiga berlaku sifat berikut:

"Jumlah dua sisi dari suatu segitiga selalu lebih panjang dibandingkan sisi ketiga"

Misalkan ABC suatu segitiga dengan panjang sisi berturut-turut a,b, dan c. Maka

berdasarkan sifat di atas berlaku:

- ✓ $a + b > c$
- ✓ $a + c > b$
- ✓ $b + c > a$

Contoh 1:

Tentukan semua nilai bilangan bulat positif n sehingga ukuran 5, 6, dan n – 4 merupakan sisi-sisi suatu segitiga

Pembahasan:

- ✓ Misalkan 5 sisi yang terpanjang maka $5 < 6 + n - 4$, $n > 3$
  Selain itu $n - 4 \leq 5$ sehingg $n \leq 9$.
  Nilai n yang memenuhi adalah 4, 5, 6, 7,8, 9.
- ✓ Misalkan 6 sisi yang terpanjang maka $6 < 5 + n - 4$, $n > 5$
  Selain itu $n - 4 \leq 6$, $n \leq 10$
  Nilai n yang memenuhi adalah 6, 7, 8, 9, 10
- ✓ Misalkan n-4 sisi yang terpanjang maka $n - 4 < 6 + 5$, $n < 7$
  Selain itu $n - 4 \geq 6$ & $n - 4 \geq 5$, maka $n \geq 10$
  Tidak ada nilai n yang memenuhi.

Jadi, nilai yang memenuhi kondisi pada soal adalah 4,5,6,7,8,9,10

LATIHAN 3I

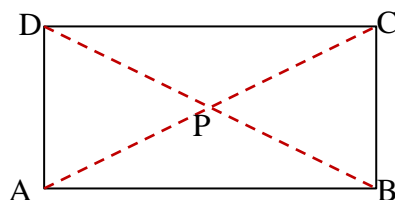
1. (OSK, Tipe 1/2012) Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi: $AB = x + 1, BC = 4x - 2,$ & $CA = 7 - x$. Tentukan nilai dari x sehingga segitiga ABC merupakan segitiga sama kaki.
2. (OSK 2007) Keliling sebuah segitiga adalah 8. Jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan bulat, maka luas segitiga tersebut sama dengan ....
3. Diketahui segitiga ABC dan titik D titik tengah BC.
   Buktikan bahwa $AD < \frac{1}{2}(AB + AC)$
4. (OSP, 2005, Bagian Kedua) Panjang ketiga sisi a, b, c dengan $a \leq b \leq c$, sebuah segitiga siku-siku adalah bilangan bulat. Tentukan semua barisan (a, b, c) agar nilai keliling dan nilai luas segitiga tersebut sama.
5. (OSP, 2009, Bagian Pertama) Banyaknya segitiga tumpul dengan sisi bilangan asli yang memiliki sisi-sisi terpanjang 10 adalah ⋯.
   (Catatan : dua segitiga kongruen dianggap sama)

4. SEGIEMPAT

Pada waktu kalian di SMP dahulu telah mempelajari tentang segiempat. Dalam buku ini akan direview lagi definisi dan sifat-sifatnya. Adapun yang akan dibahas di buku ini adalah Persegi panjang, Persegi, Jajar genjang, Belah ketupat, Layang-layang, dan Trapesium.

a) Persegi Panjang

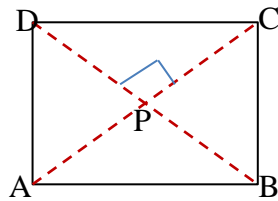
Definisi:

Persegi panjang adalah bangun datar segi empat yang memiliki dua pasang sisi sejajar dan salah satu sudutnya siku-siku.

Sifat-Sifat:
Suatu persegi panjang memiliki sifat-sifat berikut:

- Mempunyai empat sisi, dengan sepasang sisi yang berhadapan *sama panjang dan sejajar*.
  Dari gambar maka $AB \parallel DC \;\&\; AD \parallel BC; AB = DC \;\&\; AD = BC$.
- Memiliki dua diagonal, dimana kedua diagonalnya *sama panjang dan saling membagi dua sama besar*.
  Dari gambar maka $AC = AB; DP = PB; AP = PC$.
- Memiliki empat sudut, dimana keempat sudutnya *sama besar dan merupakan sudut siku-siku.*
  Dari gambar maka $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$.
- Dapat menempati bingkainya kembali dengan *empat cara*.

Luas & Keliling:
Misalkan panjang dan lebar suatu persegi panjang ABCD berturut-turut
$p = AB = CD; l = AD = BC$

- Luas: $[ABCD] = p.l$
- Keliling: $K = 2(p + l)$

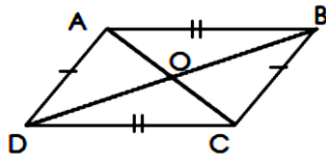
b) Persegi
Definisi:
Persegi adalah suatu persegi panjang yang keempat sisinya sama panjang.

Sifat-Sifat:
Suatu persegi memiliki sifat-sifat berikut:

- Mempunyai empat sisi yang *sama panjang.*
  Dari gambar maka $AB = BC = CD = DA$
- Sepasang sisi yang berhadapan *sejajar*.
  Dari gambar maka $AB \parallel DC \;\&\; AD \parallel BC$.
- Memiliki dua diagonal, dimana kedua diagonalnya *sama panjang dan saling membagi dua sama besar serta berpotongan tegak lurus*.
  Dari gambar maka $AC = AB; DP = PB; AP = PC;\ AB \perp AC\ (\angle APC = 90^0)$.
- Memiliki empat sudut, dimana keempat sudutnya *sama besar dan merupakan sudut siku-siku.*
  Dari gambar maka $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$.
- Dapat menempati bingkainya kembali dengan *delapan cara*.

Luas & Keliling:
Misalkan panjang sisi suatu persegi ABCD, $s = AB = CD = AD = BC$

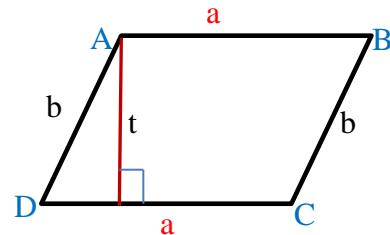
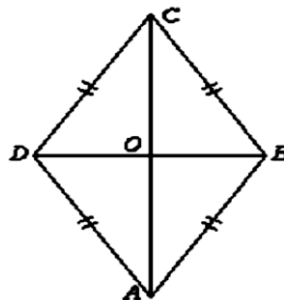
- Luas: $[ABCD] = s.s = s^2$
- Keliling: $K = 4s$

c) Jajar Genjang
Definisi:

Jajar genjang adalah segiempat yang setiap pasang sisinya yang berhadapan sejajar dan sama panjang.

Sifat-Sifat:
Suatu jajar genjang memiliki sifat-sifat berikut:

- ➢ Mempunyai empat sisi, dengan sepasang sisi yang berhadapan *sama panjang dan sejajar*.
  Dari gambar maka $AD = BC \;\&\; DC = AB;\ AD \parallel BC \;\&\; DC \parallel AB.$
- ➢ Memiliki dua diagonal, dimana kedua diagonalnya *sama panjang dan saling membagi dua sama besar.*
  Dari gambar maka $AC = DB; AO = OC \;\&\; DO = OB.$
- ➢ Memiliki empat sudut, dimana sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
  Dari gambar maka $\angle A = \angle C \;\&\; \angle D = \angle B.$
- ➢ Jumlah pasangan sudut yang saling berdekatan adalah 180^0.
  Dari gambar maka $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^0.$
- ➢ Dapat menempati bingkainya dengan tepat setelah diputar setengah putaran pada titik potong diagonalnya.

Luas & Keliling:
Dari gambar disamping, maka

- ➢ Luas jajar genjang: $[ABCD] = a.t$
- ➢ Keliling jajar genjang: $K = 2(a + b)$

d) Belah Ketupat
Definisi:
Belah ketupat adalah Jajar genjang yang keempat sisinya sama panjang.

Sifat-Sifat:
Suatu belah ketupat memiliki sifat-sifat berikut:

- ➢ Mempunyai empat sisi, dimana keempatnya sama panjang.
  Dari gambar maka $AD = DC = CB = BA.$
- ➢ Dua sisi yang berhadapan sejajar.
  Dari gambar maka $AD \parallel BC \;\&\; DC \parallel AB.$
- ➢ Memiliki dua diagonal, dimana kedua diagonalnya *saling membagi dua sama besar dan berpotongan tegak lurus.*

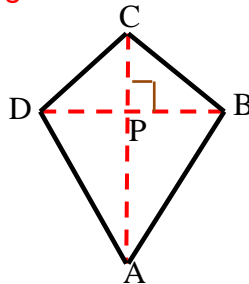
Dari gambar maka $AO = OC$ & $DO = OB$ & $DB \perp AC$.

- Diagonal-diagonalnya merupakan sumbu simetri.
- Sudut yang berhadapan sama besar dan dibagi dua sama besar oleh diagonalnya.
  Dari gambar maka $\angle D = \angle B$ & $\angle A = \angle C$; $\angle CDO = \angle ADO, \angle DCO = \angle BCO, \angle CBO = \angle ABO, \angle BAO = \angle DAO$.

- Dapat menempati bingkainya dengan empat cara.

Luas & Keliling:
Dari gambar di atas, misalkan $d_1 = AC$, $d_2 = DB$, & $a = AB = BC = CD = DA$

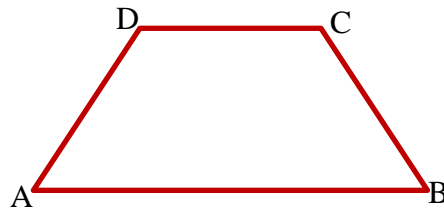
- Luas belah ketupat: $[ABCD] = \frac{1}{2} d_1 . d_2$
- Keliling belah ketupat: $K = 4a$

e) Layang-Layang
Definisi:
Layang-layang adalah segiempat dengan tepat dua pasang sisi-sisi yang berdekatan sama panjang.

Sifat-Sifat:
Suatu layang-layang memiliki sifat-sifat berikut:

- Terdapat dua pasang sisi yang sama panjang
  Dari gambar maka $AD = AB$ & $DC = CB$.
- Terdapat sepasang sudut-sudut yang berhadapan sama besar.
  Dari gambar maka $\angle ADC = \angle ABC$.
- Salah satu diagonalnya merupakan sumbu simetri, yakni diagonal AC.
- Salah satu diagonalnya membagi dua sama panjang dan saling tegak lurus
  Dari gambar maka AC membagi DB dua sama panjang dan AC tegak lurus AB, yakni $AC \perp DB$ $(\angle CPB = 90^0)$; $DP = PB$.
- Dapat menempati bingkainya dengan dua cara.

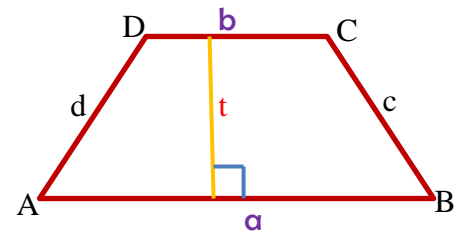
Luas & Keliling:
Dari gambar di atas, misalkan $d_1 = AC$, $d_2 = DB$, $a = AB = AD$, $b = CD = CB$

- Luas layang-layang: $[ABCD] = \frac{1}{2} d_1 . d_2$
- Keliling layang-layang: $K = 2(a + b)$

f) Trapesium
Definisi:
Trapesium adalah segiempat yang tepat mempunyai sepasang sisi yang sejajar.

Sifat-Sifat:
Suatu trapesium memiliki sifat-sifat berikut:

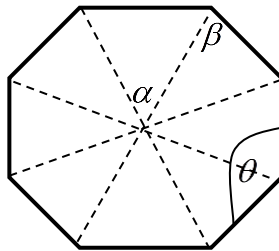
- Terdapat sepasang sisi yang berhadapan sejajar.
  Dari gambar maka $AB \parallel DC$.
- Jumlah sudut yang berdekatan di antara dua sisi sejajar pada trapesium adalah 180^0.
  Dari gambar maka $\angle BAD + \angle CDA = 180^0$ & $\angle DCB + \angle ABC = 180^0$.

Luas & Keliling:
Dari gambar di samping, maka

- Luas trapesium: $[ABCD] = \frac{1}{2}(a + b).t$
- Keliling trapesium: $K = a + c + b + d$

LATIHAN 4

1. (OSK, 2008) Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah 1/3. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah ...
2. (OSK, 2005, Bagian Kedua) Diberikan dua buah persegi, A dan B, dimana luas A adalah separuh dari luas B. Jika keliling B adalah 20 cm, maka keliling A, dalam centimeter, adalah ....
3. (OSK, 2005, Bagian Kedua) Diketahui bahwa segiempat ABCD memiliki pasangan sisi yang sejajar. Segiempat tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat jika ia berbentuk ...
4. (OSK, 2006 Tipe1) Pada kubus satuan ABCD.EFGH, titik S adalah titik tengah rusuk FG. Panjang lintasan terpendek pada permukaan kubus dari A ke S adalah ....
5. (OSK, 2006 Tipe1) Tutup sebuah kotak mempunyai luas 120 cm^2, sisi depan mempunyai luas 96 cm^2, dan sisi samping mempunyai luas 80 cm^2. Tinggi kotak tersebut, dalam cm adalah ....
6. (OSK, 2007) Sepotong kawat dipotong menjadi 2 bagian, dengan perbandingan panjang 3:2. Masing-masing bagian kemudian dibentuk menjadi sebuah persegi. Perbandingan luas kedua persegi adalah ...
7. (OSK, 2007) Diketahui empat titik pada bidang dengan koordinat A(1,0), B(2008,2007), C(2007,2007), D(0,0). Luas jajar genjang ABCD sama dengan ....
8. (OSK, 2008) Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah 1/3. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah
9. (OSK, 2008) Kubus ABCDEFGH dipotong oleh bidang yang melalui diagonal HF, membentuk sudut 30^o terhadap diagonal EG dan memotong rusuk AE di P. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, maka panjang ruas AP adalah ....

10. (OSK, 2009, Tipe1) Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi 10. Misalkan E pada AB dan F pada BD dengan AE = FB = 5. Misalkan P adalah titik potong CE dan AF. Luas DFPC adalah ⋯⋯⋯
11. (OSK, 2010) Pada sebuah persegi panjang berukuran 25 x 20 akan dibuat persegi sehingga menutupi seluruh bagian persegi panjang tersebut. Berapa banyak persegi yang mungkin dapat dibuat ?
    (Catatan: panjang sisi-sisi persegi merupakan bilangan asli)
12. (OSK, 2011, Tipe1) Diketahui segitiga ABC, titik D dan E berturut-turut pada sisi AB dan AC, dengan panjang $AD = \frac{1}{2}BD$ dan $AE = \frac{1}{2}CE$. Garis BE dan CD berpotongan di titik F. Diketahui luas segitiga ABC = 90 cm^2 maka luas segiempat ADFE adalah ....
13. (OSK, 2011,Tipe 3) Diketahui segi empat konveks ABCD; titik-titik P, Q, R, dan S berturut-turut pada sisi AB, BC, CD, dan DA. Tentukan nilai dari k sedemikian sehingga $\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA} = k < 1$ dan luas dari PQRS = 52% dari luas ABCD.
14. (OSP, 2003, Bagian Kedua) Titik-titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AE dan CG pada kubus ABCD.EFGH. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, tentukan luas segi-empat DPFQ.
15. (OSP, 2004, Bagian Pertama) Ketika menghitung volume sebuah tabung, Dina melakukan kesalahan. Ia memasukkan diameter alas ke dalam rumus volume tabung, padahal seharusnya jari-jari alas yang dimasukkan. Berapakah rasio hasil perhitungan Dinas terhadap hasil yang seharusnya ?
16. (OSP, 2004, Bagian Pertama) Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5. Berapakah luas trapesium tersebut?
17. (OSP, 2003, Bagian Pertama) Titik P terletak di dalam persegi ABCD sedemikian rupa, sehingga $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Berapakah besar sudut APB?
18. (OSP, 2005, Bagian Pertama) Misalkan ABCD adalah sebuah trapesium dengan $BC \| AD$. Titik-titik P dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB dan CD. Titik Q terletak pada sisi BC sehingga BQ : QC = 3 : 1, sedangkan titik S terletak pada sisi AD sehingga AS : SD = 1 : 3. Maka rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah ....
19. (OSP, 2005, Bagian Pertama) Misalkan ABCD adalah limas segitiga beraturan, yaitu bangun ruang bersisi empat yang berbentuk segitiga samasisi. Misalkan S adalah titik tengah rusuk AB dan T titik tengah rusuk CD. Jika panjang rusuk ABCD adalah 1 satuan panjang, maka panjang ST adalah ....
20. (OSP, 2006, Bagian Pertama) Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar dengan DC. Sebuah lingkaran yang menyinggung keempat sisi trapesium dapat dibuat. Jika AB = 75 dan DC = 40, maka keliling trapesium ABCD = ...
21. (OSP, 2006, Bagian Pertama) Luas sisi-sisi sebuah balok adalah 486, 486, 243,243, 162, 162. Volume balok tersebut adalah ...
22. (OSP, 2007, Bagian Pertama) Dona menyusun lima buah persegi yang kongruen menjadi sebuah bangun datar. Tidak ada persegi yang menindih persegi lainnya. Jika luas bangun yang diperoleh Dona adalah 245 cm^2, keliling bangun tersebut paling sedikit adalah .... cm.
23. (OSP, 2007, Bagian Pertama) Sebuah kubus berukuran 5 x 5 x 5 disusun dari 125 kubus satuan. Permukaan kubus besar lalu dicat. Rasio sisi (permukaan) ke-125 kubus satuan yang dicat terhadap yang tidak dicat adalah ⋯
24. (OSP, 2013) Diberikan bujursangkar dengan panjang sisi sama dengan $2\sqrt{3}$. Didalam bujursangkar tersebut terdapat dua segitiga sama sisi dengan alas merupakan sisi-sisi bujursangkar yang berhadapan. Perpotongan kedua segitiga sama sisi membentuk rhombus. Luas rhombus (belah ketupat) sama dengan ...

5. SEGI n-BERATURAN
Sebuah segi-n beraturan (n>3) dapat dibuat dari segitiga sama kaki yang kongruen sebnyak n. Karenanya, luas segi-n beraturan adalah n kali luas segitiga sama kaki, yaitu: $L = n\,L_{\Delta}$.

Sifat-sifat Segi- n beraturan

- Besar sudut pusat pada tiap segitiga , $\alpha = \dfrac{360^0}{n}$
- Besar sudut pada kaki tiap segitiga , $\beta = 90^0 - \dfrac{180^0}{n}$
- Besar sudut tiap sisi, $\theta = 2\beta = 180^0 - \dfrac{360^0}{n}$

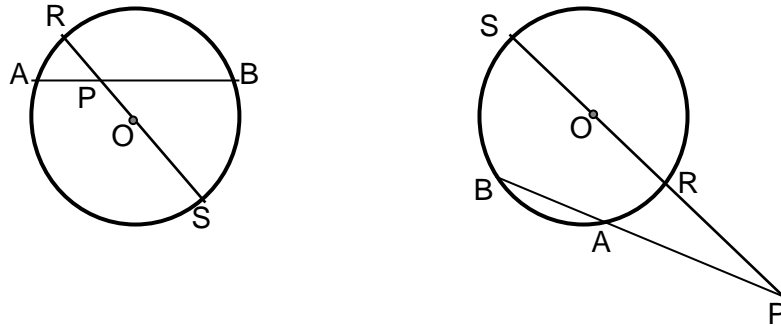
LATIHAN 5

1. (OSK, Tipe 2/2012) Diberikan segi-100 beraturan dengan panjang sisi 1 satuan. Jika S menyatakan himpunan semua nilai yang mungkin dari panjang diagonal-diagonal segi-100 tersebut maka banyak anggota S adalah ...
2. (OSK, Tipe 2/2012) Diketahui bahwa besar tiap sudut dari segi-n beraturan adalah $179{,}99^0$. Jika keliling dari segi-n tersebut adalah 36 satuan maka panjang sisinya adalah .... satuan.
3. (OSK,2004, Bagian Pertama) Pada sebuah segi-6 beraturan, rasio panjang antara diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah ....
   a. 1: 3
   b. 1: 2
   c. 1 : $\sqrt{3}$
   d. 2 : 3
   e. $\sqrt{3}$: 2

4. (OSP, 2005, Bagian Pertama) Sebuah segienam beraturan dan sebuah segitiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam adalah ...

6. LINGKARAN
A. Titik Kuasa (Power Point)

Teorema
Diketahui suatu lingkaran dan sebuah titik P. Buat sebuah garis yang memotong lingkaran di dua titik A dan B (jika garis tersebut menyinggung lingkaran, maka A=B). Maka hasil kali PA x PB bernilai tetap, tidak bergantung oleh garis yang dibuat.

Sekarang kita gunakan notasi yang sama dengan notasi pada teorema di atas. Misalkan O dan r berturut-turut sebuah pusat dan jari-jari suatu lingkaran. Perhatikan garis yang melalui O dan P yang memotong lingkaran di dua titik R dan S. Nilai $(OP-r)(OP+r)=OP^2-r^2$ disebut ***kuasa titik P terhadap lingkaran tersebut***. Jika P berada di dalam lingkaran, maka kuasanya negatif, jika P di luar lingkaran, maka kuasanya positif, jika P pada lingkaran, maka kuasanya nol.

Terkait dengan teorema sebelumnya, jika P berada di luar atau pada lingkaran, maka

$$PA.PB=PR.PS=(OP-r)(OP+r)=OP^2-r^2$$

Hal ini sama dengan kuasa P terhadap lingkaran tersebut dan jika P di dalam lingkaran, maka

$$PA.PB=PR.PS=(r-OP)(r+OP)=r^2-OP^2$$

Hal ini sama dengan -1 kali kuasa P terhadap lingkaran tersebut.

B. Lingkaran Dalam & Lingkaran Luar Segitiga

Jari-Jari lingkaran Dalam (r)

$r=\frac{L}{s}$ atau $r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

Dimana

r = panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga

a, b, c = panjang sisi-sisi segitiga

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

Jari-Jari lingkaran Luar (R)

$R = \frac{abc}{4L}$ atau $R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

Dimana

R = panjang jari-jari lingkaran luar segitiga

a, b, c = panjang sisi-sisi segitiga

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

Perluasan dari Aturan Sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Jari-Jari lingkaran Singgung Luar

- $r_a = \frac{L}{s-a}$
- $r_b = \frac{L}{s-b}$
- $r_c = \frac{L}{s-c}$

Dimana

L : Luas segitiga ABC

S: Setengah keliling segitiga ABC

r_a: Panjang jari-jari lingkaran singgung luar yang menyinggung sisi BC

r_b: Panjang jari-jari lingkaran singgung luar yang menyinggung sisi AC

r_c: Panjang jari-jari lingkaran singgung luar yang menyinggung sisi AB

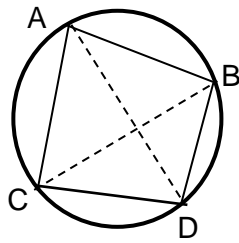
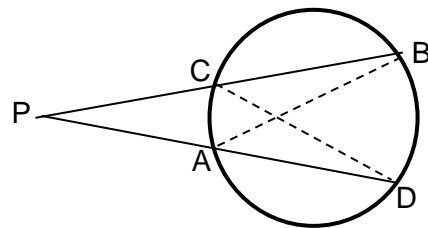
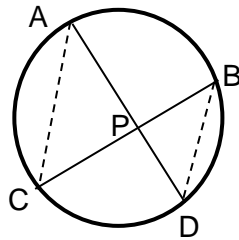
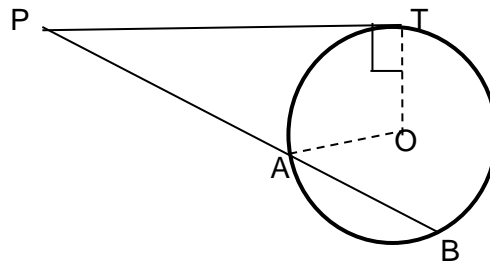
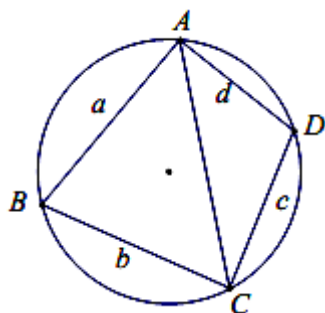
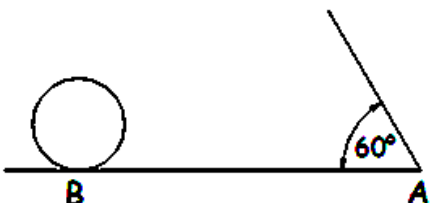
C. Teorema Berkaitan dengan Sudut pada Lingkaran

- Sudut keliling suatu lingkaran sama dengan setengah dari sudut pusat yang menghadap busur yang sama
- Sudut-sudut keliling yang menghadap busur yang sama adalah sama besar
- Sudut keliling yang menghadap setengah lingkaran adalah 90^0.
- Jumlah sudut-sudut yang berhadapan pada segiempat talibusur adalah 180^0

D. Segi Empat Tali Busur (beserta sifat-sifatnya) & Dalil Ptolomeus

Segiempat tali busur adalah segi empat yang keempat titik sudutnya ada pada suatu lingkaran.

Sifat-sifat Segi empat Tali Busur

Jika ABCD segiempat tali busur, maka $AD \,.\, BC = AC \,.\, BD + CD \,.\, AB$

(Teorema Talibusur) Jika CB dan AD adalah talibusur sebuah lingkaran yang diagonal-diagonalnya berpotongan di P di dalam lingkaran, maka $PC.PB = PA.PD$

(Teorema Secant) Jika CB dan AD adalah talibusur sebuah lingkaran yang diagonal-diagonalnya berpotongan di P di luar lingkaran, maka $PC.PB = PA.PD$

(Teorema Secant-Tangent) Jika P adalah sebuah titik di luar lingkaran, dari titik P dibuat garis singgung sehingga menyinggung lingkaran di titik T dan garis melalui T memotong lingkaran di A dan B, maka $PT^2 = PA.PB$

(Rumus Brahmagupta) Misalkan ABCD segiempat talibusur. Misalkan $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$, maka $[ABCD] = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

LATIHAN 6:

1. (OSK, 2013) Diberikan segitiga lancip ABC dengan O sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan M dan N berturut-turut pertengahan OA dan BC. Jika $\angle ABC = 4\angle OMN$ dan $\angle ACB = 6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN$ sama dengan ...
2. (OSK, Tipe 3/2012) Diberikan suatu lingkaran dengan titik pusat O dan diameter AB. Titik-titik D dan C adalah titik pada lingkaran sehingga AD sejajar OC. Jika besar $\angle OAD = 42^0$, maka besar $\angle OCD$ adalah ...
3. (OSK, Tipe 1, 2, 3/2012) Diberikan suatu lingkaran dengan diameter AB=30. Melalui A dan B berturut-turut ditarik tali busur AD dan BE. Perpanjangan AD dan BE berpotongan di titik C. Jika AC = 3 AD dan BC = 4BE, maka luas segitiga ABC adalah ....
4. (OSK, Tipe 1, 2, 3/2012) Diberikan segitiga ABC dengan keliling 3 dan jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan 5. Jika jari-jari lingkaran luarnya sama dengan 1, maka jumlah ketiga garis tinggi dari segitiga ABC tersebut adalah ...
5. (OSK, Tipe 2/2012) Diberikan segitiga siku-siku ABC dengan $AB = 3, AC = 4, \& BC = 5$. Serta D merupakan titik tengah BC. Jika $r \& s$ berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABD dan ADC maka nilai dari $\frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ adalah ...
6. (OSK, Tipe 1/2012) N lingkaran digambar pada sebuah bidang datar sedemikian sehingga terdapat enam titik dimana keenam titik tersebut terdapat pada paling sedikit tiga lingkaran. Berapa N terkecil yang memenuhi kondisi tersebut?
7. (OSK, Bagian Kedua/2002) Suatu persegi panjang berukuran 8 kali $2\sqrt{2}$ mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut?
8. (OSK, 2003, Bagian Pertama) Di dalam suatu lingkaran L_1 berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal dilukis suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan lingkaran L_1, dan dengan sumbu-x dan sumbu-y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah?
   a. 1/3
   b. 2/5
   c. $\sqrt{2}-1$
   d. 1/2
   e. $2-\sqrt{2}$
9. (OSK, 2004, Bagian Kedua) Jika luas segitiga ABC sama dengan kelilingnya, maka jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah ....
10. (OSK, 2007) Sebuah lingkaran berjari-jari 1. Luas maksimal segitiga samasisi yang dapat dimuat di dalam lingkaran adalah ...
11. (OSK, 2008) Lingkaran T merupakan lingkaran luar bagi segitiga ABC dan lingkaran dalam bagi segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya segitiga samasisi, maka rasio keliling segitiga ABC terhadap keliling segitiga PQR adalah ...
12. (OSK, 2009,Tipe 1) Banyaknya segitiga siku-siku yang kelilingnya 2009 dan sisi-sisinya bilangan bulat serta jari-jari lingkaran dalamnya juga bilangan bulat adalah ....
13. (OSK, 2009, Tipe 2) Misalkan pada suatu segitiga ABC, r menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalamnya, r_a menyatakan panjang jari-jari lingkaran singgung luar yang menyinggung sisi BC, r_b menyatakan panjang jari-jari lingkaran singgung luar yang menyinggung sisi CA, dan r_c menyatakan panjang jari-jari lingkaran singgung luar yang menyinggung sisi AB. Jika r=1, r_a=2, r_b=3, dan

r_c=6, maka panjang jari-jari lingkaran luarnya adalah ....

14. (OSK, 2010) Diketahui segitiga ABC siku-siku di A, dan pada masing-masing sisi dibuat setengah lingkaran ke arah keluar. Jika luas setengah lingkaran pada sisi AB dan AC adalah 396 dan 1100, berturut-turut, maka luas setengah lingkaran pada sisi BC adalah ?
15. (OSK, 2011,Tipe 3) Keliling suatu segitiga adalah 5 dan jumlah kuadrat sisi-sisinya adalah 17. Jika jari-jari lingkaran luar segitiga itu adalah 2, maka jumlah ketiga tinggi segitiga itu adalah ········
16. (OSP 2012) Misalkan O dan I berturut-turut menyatakan titik pusat lingkaran luar dan titik pusat lingkaran dalam pada segitiga dengan panjang sisi 3, 4, dan 5. Panjang dari OI adalah ....
17. (OSP 2012) Diberikan dua lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di dua titik yaitu A dan B dengan AB = 10. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat kedua lingkaran memotong lingkaran Γ_1 dan Γ_2 masing-masing di P dan Q. Jika PQ = 3 dan jari-jari lingkaran Γ_1 adalah 13, maka jari-jari lingkaran Γ_2 adalah ....

18. (OSP, 2002) Sebuah saluran air seharusnya dibuat dengan menggunakan pipa berdiameter 10 cm. Akan tetapi yang tersedia hanyalah pipa-pipa kecil yang berdiameter 3 cm. Supaya kapsitas saluran tidak lebih kecil daripada yang diinginkan, berapakah banyaknya pipa 3 cm yang perlu dipakai sebagai pengganti satu pipa 10 cm?
19. (OSP, 2003, Bagian Pertama) Sebuah bola dengan jari-jari r ditendang dari B ke A. Bola tersebut menggelinding sebanyak tepat 10 putaran sebelum membentur bidang miring dan berhenti. Berapakah jarak dari B ke A?

20. (OSP, 2003, Bagian Pertama) Suatu lingkaran mempunyai diameter AB yang panjangnya merupakan bilangan bulat 2-angka. Tali busur CD tegak lurus pada AB dan memotong AB di titik H. Panjang CD sama dengan bilangan yang diperoleh dengan menukar letak kedua angka dari panjang AB. Jika jarak dari H ke pusat lingkaran merupakan bilangan rasional, berapakah panjang AB?
21. (OSP, 2004, Bagian Pertama) Santi dan Tini berlari sepanjang sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran. Keduanya mulai berlari pada saat yang sama dari titik P, tetapi mengambil arah berlawanan. Santi berlari $\frac{3}{2}$ kali lebih cepat daripada Tini. Jika PQ adalah garis tengah lingkaran lintasan dan keduanya berpapasan untuk pertama kalinya di titik R, berapa derajatkah besar $\angle RPQ$?
22. (OSP, 2005, Bagian Kedua) Panjang sisi terbesar pada segiempat talibusur ABCD adalah 1, sedangkan jari-jari lingkaran luar segitiga ACD adalah 1. Tentukan nilai terkecil yang mungkin bagi a. Segiempat ABCD yang bagaimana yang memberikan nilai a sama dengan nilai terkecil tersebut?
23. (OSP, 2009, Bagian Pertama) Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c serta $a < b < c$. Misalkan r dan R berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya. Jika $\frac{r(a+b+c)}{R^2} = \sqrt{3}$, maka nilai dari $\frac{r}{a+b+c}$ adalah ...
24. (OSP, 2010) Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1, merupakan garis singgung persekutuan dari kedua lingkaran tersebut. Jika PA = AB = 4, maka luas lingkaran kecil adalah ····
25. (OSP, 2011) Misalkan Γ lingkaran luar segitiga ABC. Talibusur AD adalah garis bagi sudut BAC yang memotong BC di titik L. Talibusur DK tegaklurus pada AC

dan memotongnya di titik M. Jika $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$, maka perbandingan $\frac{AM}{MC} = \cdots$

26. (OSP, 2011) Misalkan ABC suatu segitiga dan P titik di dalam segitiga. Misalkan D, E, F berturut-turut titik di sisi-sisi BC, CA, AB sedemikian sehingga PD tegaklurus BC, PE tegaklurus CA dan PF tegaklurus AB. Jika segitiga DEF sama sisi dan $\angle APB = 70^{o}$, maka $\angle ACB = \cdots$..

7. MASS POINT

A. Pendahuluan

"Mass Points" merupakan suatu metode/teknik untuk menghitung perbandingan antara panjang dari ruas garis yang dibuat oleh cevians dan transversal dari suatu segitiga. Pertanyaan-pertanyaan dalam Kompetisi Matematika baik dalam negeri/luar negeri yang dapat diselesaikan dengan metode *"Mass Points"* juga dapat diselesaikan dengan konsep vektor maupun perbandingan luas.

Akan tetapi menyelesaikan suatu pertanyaan dengan metode *"Mass Points"* akan diperoleh cara/proses yang lebih sederhana dan proses mencari solusi juga lebih cepat. Hal ini, berarti metode ini sangat penting sebagai alat untuk menyelesaikan setiap masalah-masalah matematika dalam suatu kompetisi yang menuntut kecepatan yang tinggi dalam menyelesaikan masalah yang bersangkutan.

Beberapa kompetisi Internasional yang soal-soalnya dapat diselesaikan dengan konsep *"Mass points"* antara lain The New York City Intercholastics Mathematics League (NYCIML), American Regions Mathematics League (ARML), American High School Mathematics Examination (AHSME), American Invitational Mathematics Examination (AIME).

B. Definisi

Definisi 1:
"Mass Points" merupakan himpunan bilangan bulat positif n (sebagai bobot/massa), dan titik P dalam suatu bidang atau ruang. Simbol "mass points" adalah (n, P) dan kadang-kadang ditulis juga dalam bentuk nP.

Definisi 2:
Dua "Mass Points" (a, A) dan (b, B) dikatakan sama jika dan hanya jika a = b dan A = B.

Definisi 3:
Jumlah dari dua "Mass Points" (a, A) dan (b, B) adalah suatu "Mass Points" berbentuk $(a+b, C)$, dimana C merupakan titik pada ruas garis AB dan AC : CB = b : a. Jumlah dari (a, A) dan (b, B) kadang-kadang disebut *"Centroid" atau " Centre of Mass"*.

Definisi 3:
Diketahui suatu *"Mass Points"* (n, P) dan suatu scalar m > 0, kita definisikan perkalian suatu *"Mass Points"* dengan bilangan real positif: $m(n, P) = (mn, P)$.

C. Sifat-Sifat Dasar dalam "*Mass Points"*

1. Sifat Tertutup
   Penjumlahan dalam "Mass Points" selalu menghasilkan jumlah yang tunggal/unik.

2. Sifat Komutatif
$nP + mQ = mQ + nP$

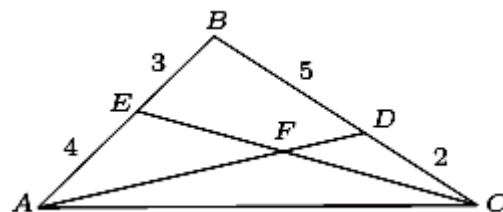
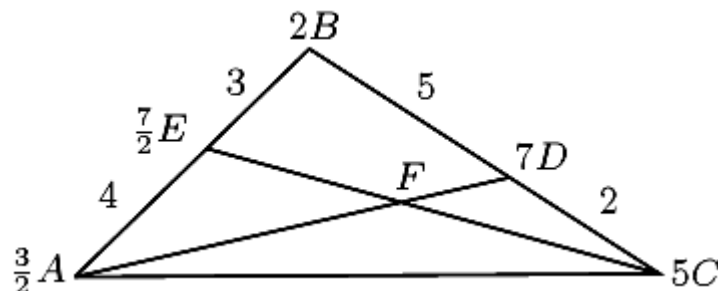
3. Sifat Asosiatif
$nP + (mQ + kR) = (nP + mQ) + kR = nP + mQ + kR$

4. Sifat Idempoten
$nP + mP = (n + m)P$

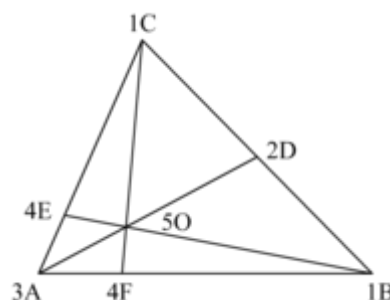
5. Sifat Distributif
$k(nP + mQ) = knP + kmQ$

6. Sifat Pengurangan
Jika $n > m$, maka $nP = mQ + yY$. Jika diketahui yang akan kita cari adalah "Mass Point" yY, maka $yY = (n - m)R$ dimana P pada ruas garis RQ dan $RP : PQ = m : (n - m)$.

D. Contoh

1. Dalam segitiga ABC, sisi BC dibagi oleh D dengan perbandingan 5 : 2 dan sisi BA dibagi oleh titik E dengan perbandingan 3 : 4 seperti pada gambar di bawah ini. Tentukan perbandingan EF dan FC dimana F membagi garis cevians AD dan CE.

Solution:
Agar titik D sebagai titik kesimbangan dari BC, kita pasangkan bobot 2 pada B dan bobot 5 pada C. Sekarang pada sisi AB, agar titik E sebagai titik keseimbangan, kita pasangkan $2.\frac{3}{4} = 3/2$ pada A. Maka pada titik-titik keseimbangan pada sisi-sisi segitiga, kita memiliki persamaan
$2B + 5C = 7D$ atau $2B + \frac{3}{2}A = \frac{7}{2}E$ (Perhatikan gambar di bawah ini)

"The centre of mass" 8,5X dari sistem $\{\frac{3}{2}A, 5C, 2B\}$ diletakan pada jumlah $\frac{3}{2}A + 2B + 5C$, yang dapat dihitung dalam dua cara berdasarkan sifat

asosiatif:
$\frac{7}{2}E+5C=\left(\frac{3}{2}A+2B\right)+5C=8{,}5X=\frac{3}{2}A+(2B+5C)=\frac{3}{2}A+7D$.
Jadi, dengan menggunakan definisi penjumlahan, X diletakan pada sisi EC atau sisi AD (pada perpotongan EC dan AD, titik F). Sehingga titik F merupakan titik tumpu dari keseimbangan $\frac{3}{2}A$ dan 7D; keseimbangan antara $5C$ dan $\frac{7}{2}E$. Hal ini berarti, $DF:FA=\frac{3}{2}:7=3:14$ dan $EF:FC=5:\frac{7}{2}=10:7$.

2. Dalam segitiga ABC, E pada AC sehingga CE = 3 AE dan F pada AB sehingga BF = 3 AF. Jika BE dan CF berpotongan pada O dan AO berpotongan BC pada D, Hitunglah nilai $\frac{OB}{OE}$ dan $\frac{OD}{OA}$.
Solution:
Kita pasangkan bobot 3 pada A. Dengan perbadingan dari panjang, bobot pada B dan C haruslah keduanya adalah 1. Dengan menggunakan penjumlahan bobot/massa, bobot pada titik E dan F keduanya 4. Sehingga, bobot pada titik O adalah 4 + 1 = 5, hal ini membuat bobot pada D haruslah 5 – 3 = 2. Jadi, $\frac{OB}{OE}=\frac{4}{1}$ dan $\frac{OD}{OA}=\frac{3}{2}$.

E. Latihan Soal 7

1. (NYCIML/S75#27) Dalam segitiga ABC, C' titik pada sisi AB sehingga $AC':C'B=1:2$, dan B' titik pada sisi AC sehingga $AB':B'C=3:4$. Jika $\overline{BB'}\cap\overline{CC'}=P$ dan jika A' merupakan perpotongan antara sinar AP dan ruas garis BC, tentukan $AP:PA'$.
2. (NYCIML/F75#12) Dalam segitiga ABC, D pada sisi AB dan E pada sisi BC. Misalkan $\overline{CD}\cap\overline{AE}=K$ dan misalkan sinar $BK\cap\overline{AC}=F$. Jika AK : KE = 3 : 2 dan $BK:KF=4:1$, maka tentukan $CK:KD$.
3. (NYCIML/S76#15) Dalam segitiga ABC, D pada sisi BC sehingga BD : DC = 3 : 2, dan E pada sisi AD sehingga AE : ED = 5 : 6. Jika sinar BE berpotongan dengan ruas AC pada titik F, tentukan $BE:EF$.
4. (NYCIML/F76#5) Dalam segitiga ABC, D titik pada sisi BC . Ruas garis AD memotong median BE menjadi dua bagian yang sama. Tentukan BD : DC.
5. (NYCIML/F76#13) Dalam segitiga ABC, D terletak pada sisi AB sehingga AD : DB = 3 : 2 dan E pada BC sehingga BE : EC = 3 : 2. Jika sinar DE dan sinar AC berpotongan pada F, maka tentukan DE : EF.

6. (NYCIML/S78#25) Dalam segitiga ABC, $\angle A = 45^0$ dan $\angle C = 30^0$. Jika garis tinggi BH memotong median AM pada titik P, maka $AP : PM = 1 : k$. Tentukan nilai k yang mungkin.
7. (NYCIML/F80#13) Dalam segitiga ABC, D titik tengah sisi BC dan E titik tengah dari sisi AD. Jika sinar BE dan ruas garis AC berpotongan di F. Tentukan nilai dari $\frac{FE}{EB} + \frac{AF}{FC}$.
8. (NYSML/85#I 6) Dalam segitiga ABC, AB = 3, BC = 5, AC = 7, dan AD dan CE garis bagi yang berpotongan pada titik P. Hitung panjang AP.

BAB III
TEORI BILANGAN

1. Sistem Bilangan Bulat
   Karena teori bilangan mencakup tentang sifat-sifat bilangan bulat. Kita mulai dengan mengenal & mereview beberapa notasi dan sifat-sifat bilangan bulat. Perhatikan notasi-notasi bilangan berikut:
   $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (**bilangan asli** atau **bilangan bulat positif**)
   $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (**bilangan bulat**)
   $\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{m} | n, m \in Z \,\&\, m \neq 0\right\}$ (**bilangan rasional**)
   $\mathbb{R}$ = **bilangan real**
   Perhatikan bahwa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Sekarang kita bahas sifat-sifat dasar tentang bilangan bulat:

   Beberapa Sifat untuk Bilangan Bulat
   1. Jika $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b,\ a - b,\ \&\ ab \in \mathbb{Z}$.
      (Z tertutup terhadap penjumlahan, pengurangan, dan perkalian)
   2. Untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$, $a + b = b + a$
   3. Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(ab)c = a(bc)$
   4. Untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a + b).c = ac + bc$
   5. Untuk semua $a \in \mathbb{Z}$, $a + 0 = a \,\&\, a.1 = a$
   6. Jika $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dengan $ac = bc$, $c \neq 0$, maka $a = b$
   7. Jika $a \in \mathbb{Z}$ maka tidak ada $x \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a < x < a + 1$.
   8. Jika $a, b \in \mathbb{Z}$ dan $ab = 1$, maka berlaku $a = b = 1$ atau $a = b = -1$.
   9. Aturan Eksponen
      Untuk n, m di $\mathbb{N}$ dan a, b di $\mathbb{R}$ kita memiliki:
      - ✓ $(a^n)^m = a^{nm}$
      - ✓ $(ab)^n = a^n b^n$
      - ✓ $a^n a^m = a^{n+m}$

      Aturan ini berlaku untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ jika a dan b tidak nol.
   10. Sifat Terurut dengan Baik untuk $\mathbb{N}$
       Untuk setiap himpunan tak kosong dari bilangan bulat positif mempunyai element terkecil.

2. Keterbagian
   Definisi
   Jika a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, kita katakan a *membagi* b jika ada bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = ac$. Jika a membagi b, kita katakan juga bahwa a adalah *pembagi* atau *faktor* dari b atau b merupakan *kelipatan* dari a.

   Jika a membagi b dapat kita tulis $a | b$ dan jika a *tidak* membagi b, kita tulis $a \nmid b$.
   Contoh 1:
   Berdasarkan ilustrasi tentang konsep keterbagian dari bilangan bulat, maka
   $13 | 182,\ -5 | 30, 17 | 289, -3 | 33, 17 | 0$, dan $7 \nmid 50$

Contoh 2:
Pembagi dari 6 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ \& \pm 6$. Adapun pembagi dari 17 adalah $\pm 1 \& \pm 17$.

Sifat-Sifat Keterbagian
Jika a, b, c, m, dan n merupakan bilangan bulat maka berlaku sifat-sifat berikut:

a. $a \mid a$ (*setiap bilangan bulat membagi dirinya sendiri*)

b. Jika $a \mid b \,\&\, b \mid c$, maka $a \mid c$. (*sifat transitif*)

c. Jika $c \mid a \,\&\, c \mid b$, maka $c \mid (ma + nb)$ (*sifat kelinieran*)

d. Jika $a \mid b$, maka $ca \mid cb$. (*sifat perkalian*)

e. $1 \mid a$ (*satu membagi semua bilangan bulat*)

f. Jika $a \mid 1$, maka $a = \pm 1$ (*1 dan – 1 merupakan pembagi dari 1*)

g. $a \mid 0$ (*semua bilangan kecuali nol membagi nol*)

h. Jika $a \mid b \,\&\, b \mid a$ maka $a = \pm b$. (*bilangan a dan b disebut berasosiasi*)

Bukti untuk sifat a & d – h diserahkan kepada pembaca. Sekarang akan kita buktikan sifat b dan c.

Sifat b
Karena $a \mid b \,\&\, b \mid c$ maka ada bilangan bulat e dan f sedemikian sehingga $b = ae \,\&\, c = bf$. Perhatikan bahwa $c = (ae)f = a(ef)$. Karena e dan f bilangan bulat, maka ef juga bilangan bulat, sehingga dapat kita simpulkan bahwa $a \mid c$. (terbukti)

Sifat c
Karena $c \mid a \,\&\, c \mid b$ maka ada bilangan bulat e dan f sedemikian sehingga $a = ce \,\&\, b = cf$. Perhatikan bahwa $ma + nb = m(ce) + n(cf) = c(me + nf)$. Karena m, e,n,f bilangan bulat maka me+nf juga bilangan bulat Sehingga dapat kita simpulkan bahwa $c \mid (ma + nb)$. (terbukti)

Contoh 3-a:
Karena $3 \mid 21 \,\&\, 3 \mid 33$, berdasarkan sifat c maka 3 membagi $5.21 - 3.33 = 105 - 99 = 6$.

Contoh 3-b:
Buktikan bahwa untuk semua bilangan bulat n, $n^2 + 3n + 5$ tidak habis dibagi oleh 121.
Pembahasan:
Perhatikan bahwa $n^2 + 3n + 5 = (n + 7)(n - 4) + 33$.
Sehingga $11 | n^2 + 3n + 5 \iff 11 | (n + 7)(n - 4)$. Jadi, jika $11 \nmid (n + 7)(n - 4)$ maka 121 tidak membagi $n^2 + 3n + 5$.

Kita asumsikan 11 membagi (n+7)(n-4), maka $11 | n + 7 \ atau \ 11 | n - 4$.
Karena $11 | n + 7 \ \& \ 11 | n - 4$, maka $121 | (n + 7)(n - 4)$.
Jelas bahwa $121 \nmid 33$, sehingga $121 \nmid (n + 7)(n - 4) + 33$.
Jadi, untuk kasus ini terbukti bahwa $121 \nmid n^2 + 3n + 5$.

Algoritma Pembagian

Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $b > 0$, maka terdapat secara unik bilangan bulat q dan r sedemikian sehingga $a = bq + r$ dimana $0 \leq r < b$.

Ket: q merupakan hasil bagi, r merupakan sisa pembagian, a merupakan bilangan yang dibagi, dan b adalah pembagi.

Perhatikan bahwa a dapat habis dibagi b jika dan hanya jika sisa pada lagoritma pembagian sama dengan nol.

Contoh 4:

Jika a=133 dan b=21, maka q=6 dan r=7, Karena $133 = 21.6 + 7$. Dan juga Jika a=-50 dan b=8, maka q=-7 dan r=6, Karena $-50 = 8(-7) + 6$.

Definisi

Jika sisa ketika n dibagi 2 adalah 0, maka $n = 2k$ untuk suatu bilangan bulat positif k dan ini kita sebut bahwa n adalah *bilangan genap.* Sedangkan Jika sisa ketika n dibagi 2 adalah 1, maka $n = 2k + 1$ untuk suatu bilangan bulat positif k dan ini kita sebut bahwa n adalah *bilangan ganjil.*

Dengan cara yang sama, ketika d=4, kita gunakan algoritma pembagian di atas: Jika n dibagi dengan 4, maka sisanya adalah 0, 1, 2, atau 3. Sehingga, setiap bilangan bulat dapat berbentuk: $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$, atau $4k + 3$, untuk suatu bilangan bulat k.

Uji Keterbagian Suatu Bilangan

Misalkan n bilangan bulat positif yang ditulis dalam basis 10:

a. Bilangan n habis dibagi 2 jika dan hanya jika digit terakhirnya merupakan bilangan genap.
b. Bilangan n habis dibagi 3 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 3.
c. Bilangan n habis dibagi 4 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 4.
d. Bilangan n habis dibagi 5 jika dan hanya jika digit terakhirnya merupakan digit 0 atau 5.
e. Bilangan n habis dibagi 6 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 3 dan digit terakhirnya merupakan bilangan genap.
f. Bilangan n habis dibagi 7 jika dan hanya jika digit terakhirnya dikalikan 2, dan menjadi pengurang dari bilangan sisa dan hasilnya habis dibagi 7. *Sebagai contoh, Apakah bilangan 5236 habis dibagi 7?*
   Kita pisahkan 6 (digit terakhir bilangan), kemudian 523 – 2 x 6 = 511.
   Dilanjutkan lagi, apakah 511 habis dibagi 7?
   Kita pisahkan 1 (digit terakhir 511), kemudian 51 – 2 x 1=49, 49 habis dibagi 7.
   Jadi, 5236 habis dibagi 7.
g. Bilangan n habis dibagi 8 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 8.
h. Bilangan n habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 9.
i. Bilangan n habis dibagi 10 jika dan hanya jika digit terakhirnya merupakan digit 0.
j. Bilangan n habis dibagi 11 jika dan hanya jika jumlah silang tanda berganti habis dibagi 11. *Sebagai contoh, 979 kelipatan 11: amati bahwa (9-7+9)=11; dan 8679 juga kelipatan 11: amati bahwa (8-6+7-9)=0=0 x 11, dll.*

k. Bilangan n habis dibagi 12 jika dan hanya jika jumlah semua digit-digitnya habis dibagi 3 dan dua digit terakhirnya habis dibagi 4.
l. Bilangan n habis dibagi 25 jika dan hanya jika dua digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 25.
m. Bilangan n habis dibagi 125 jika dan hanya jika tiga digit terakhirnya merupakan bilangan yang habis dibagi 125.

Contoh 5:
(OSK 2003) Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?
Pembahasan:
Jumlah digit 20000002=2+0+0+0+0+0+0+2=4 (tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20011002=2+0+0+1+1+0+0+2=6 (tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20022002=2+0+0+2+2+0+0+2=8 (tidak habis dibagi 9)
Jumlah digit 20033002=2+0+0+3+3+0+0+2=10 (tidak habis dibagi 9)
Jadi, banyaknya bilangan yang habis dibagi 9 adalah 0.

Contoh 6:
(OSP 2003) Berapakah bilangan bulat positif k terkecil sehingga $\underbrace{20032003\ldots2003}_{k\ \ kali}$ habis dibagi 9?
Pembahasan:
Misalkan $N=\underbrace{20032003\ldots2003}_{k}$
Agar N habis dibagi 9 maka jumlah digit N harus habis dibagi 9.
Karena 2+0+0+3=5 maka jumlah digit N=5k.
Jadi, bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi adalah k=9.

Perlu diingat:
Perkalian n bilangan bulat berurutan selalu habis dibagi oleh n!
Coba, kerjakan menggunakan fakta di atas!
Buktikan bahwa $6 \mid n^3 - n$ untuk semua bilangan bulat n.

Contoh 7:
(OSK-Tipe 3/2012) Banyaknya bilangan bulat n sehingga $\frac{10n^2-55}{2n^2+3}$ merupakan bilangan bulat adalah ....
Pembahasan:
Perhatikan bahwa $\frac{10n^2-55}{2n^2+3} = 5 - \frac{70}{2n^2+3}$

Maka $2n^2+3$ membagi 70.

Karena $2n^2+3 \geq 3$, maka nilai $2n^2+3$ yang mungkin memenuhi adalah 5, 7, 10, 14, 35, atau 70.

Dari keenam nilai di atas yang membuat n bulat adalah 5 atau 35.

Jika $2n^2+3=5,\ n=1\ atau\ -1$

Jika $2n^2+3=35,\ n=4\ atau\ -4$

Jadi, banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi ada 4.

Contoh 8:
Tentukan semua bilangan bulat positif n sedemikian sehingga untuk semua bilangan ganjil a, jika $a^2 \leq n$ maka $a|n$.
Pembahasan:
Misalkan a bilangan ganjil terbesar sedemikian sehingga $a^2 \leq n$, sehingga jelas bahwa $n < (a+2)^2$.

Jika $a \geq 7$, maka $a-4, a-2, a$ adalah bilangan ganjil yang membagi n.
Hal ini berakibat bahwa $(a-4)(a-2)a|n$, dan $(a-4)(a-2)a \leq (a+2)^2$
Equivalen dengan $a^3 - 6a^2 + 8a \leq a^2 + 4a + 4$.
Maka $a^3 - 7a^2 + 4a - 4 \leq 0$ atau $a^2(a-7) + 4(a-1) \leq 0$, ini suatu yang salah untuk $a \geq 7$.
Jadi nilai a yang memenuhi $a = 1,3,\ atau\ 5$

- Jika $a = 1$, maka $1^2 \leq n < 3^2$, sehingga $n \in \{1,2,3,\ldots,8\}$.
- Jika $a = 3$, maka $3^2 \leq n < 5^2$, dan $1.3|n$, sehingga $n \in \{9,12,15,18,21,24\}$.
- Jika $a = 5$, maka $5^2 \leq n < 7^2$, dan $1.3.5|n$, sehingga $n \in \{30,45\}$.

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,18,21,24,30,45\}$
Contoh 9:
(IMO/Ke 39) Tentukan semua pasangan (a,b) dari bilangan bulat positif sedemikian sehingga $ab^2 + b + 7$ membagi $a^2b + a + b$.
Pembahasan:
Dari pernyataan $ab^2 + b + 7|(a^2b + a + b)$, kita peroleh:
$ab^2 + b + 7|b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) \Longrightarrow ab^2 + b + 7|b^2 - 7a$.
Kasus I: Jika $b^2 - 7a = 0$, hal ini berakibat $b^2 = 7k,\ 7k^2$. Perhatikan bahwa $(7k^2, 7k) \geq 1$ merupakan solusi untuk masalah ini.

Kasus II: Jika $b^2 - 7a > 0$, maka $ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a$ dan kita peroleh suatu kontradiksi, yakni $b^2 - 7a < b^2 < ab^2 + b + 7$
Kasus III: Jika $b^2 - 7a < 0$, maka $ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a$. Hal ini mungkin terjadi hanya jika $b^2 < 7$, yakni b = 1 atau b = 2.
Jika b = 1, maka a = 11 atau a = 49
Jika b = 2, $4a + 9|a + 22 \Longrightarrow 4a + 9 \leq a + 22 \Longrightarrow 3a \leq 13$. Sehingga tidak ada nilai a yang mungkin.

Jadi, solusi untuk soal ini adalah: $(7k^2, 7k),\ (11,1), dan\ (49,1)$

Contoh 10:
(Romanian IMO Team Selection Test/1998) Tentukan semua bilangan bulat positif (x, n) sedemikian sehingga $x^n + 2^n + 1$ sebagai pembagi dari $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.
Pembahasan:
Kasus I: Jika $n = 1$, maka $x + 3|x^2 + 5 = (x+3)(x-3) + 14$
Sehingga $x + 3$ harus membagi 14 dan x yang mungkin adalah x = 4 atau 11.

Kasus II: Jika $n \geq 2$:

- Untuk $x \in \{1,2,3\}$ kita punya:
  $1 + 2^n + 1 < 1 + 2^{n+1} + 1 < 2(1 + 2^n + 1)$,
  $2^n + 2^n + 1 < 2^{n+1} + 2^{n+1} + 1 < 2(2^n + 2^n + 1)$,
  $2(3^n + 2^n + 1) < 3^{n+1} + 2^{n+1} + 1 < 3(3^n + 2^n + 1)$.
  Sehingga $x^n + 2^n + 1$ tidak membagi $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

- Untuk $x \geq 4$,
  $x^n = \frac{x^n}{2} + \frac{x^n}{2} \geq \frac{2^{2n}}{2} + \frac{x^2}{2}$, sehingga
  $(2^n + 1)x \leq \frac{((2^n+1)^2+x^2)}{2} = \frac{(2^{2n}+2^{n+1}+1+x^2)}{2} < 2^{n+1} + x^n + 2^n + 2.$
  Jadi,
  $$(x-1)(x^n + 2^n + 1) = x^{n+1} + 2^n x + x - x^n - 2^n - 1$$
  $$< x^{n+1} + 2^{n+1} + 1 < x(x^n + 2^n + 1);$$
  Sehingga $x^n + 2^n + 1$ tidak membagi $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

$\therefore$ Solusinya adalah $(4,1)$ dan $(11,1)$

LATIHAN 2

1. Tentukan semua anggota himpunan S, dimana $S = \left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x^3-3x+2}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. (OSK, 2013) Diberikan himpunan $\left\{x \in \mathbb{Z} \middle| \frac{x^2-2x+7}{2x-1} \in \mathbb{Z}\right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ...
3. (OSK, Tipe 1/2/3/2012) Bilangan asli terbesar x kurang dari 1000 sehingga terdapat tepat dua bilangan asli n sehingga $\frac{n^2+x}{n+1}$ merupakan bilangan asli adalah ....
4. (OSK, Tipe 1/2012) Jika hasilkali tiga bilangan ganjil berurutan sama dengan 7 kali jumlah ketiga bilangan itu, maka jumlah kuadrat ketiga bilangan itu adalah ...
5. (OSK, Tipe 2/2012) Jumlah dari 2012 bilangan genap berurutan mulai dari n merupakan pangkat 2012 dari suatu bilangan asli. Nilai terkecil dari n yang mungkin adalah ....
6. (OSK, Tipe 1/2011) Misalkan kita menuliskan semua bilangan bulat 1, 2, 3, ..., 2011. Berapa kali kita menuliskan angka 1?
7. (OSK, Tipe 3/2011) Jika bilangan m dibagi 5 memberikan sisa 3, dan bilangan n dibagi 5 memberikan sisa 2; maka mn bilangan bila dinagi 5 akan memberikan sisa ....
8. (OSK, Tipe 3/2011) Jumlah digit dari $(111.111.111)^2$ adalah ....
9. (OSK, Tipe 3/2011) Untuk bilangan asli $n, p(n), \& s(n)$ berturut-turut menyatakan hasil kali dan jumlah angka pembentuk n. Jika n bilangan dua angka dan $n + p(n) + s(n) = 69$, maka n adalah ....
10. (OSK 2010) Nilai n terkecil sehingga bilangan $\underbrace{20102010\ldots2010}_{n\ buah\ 2010}$ habis dibagi 99 adalah ...
11. (OSK 2008) Jumlah empat bilangan asli berturutan senantiasa habis dibagi p. Maka nilai p terbesar adalah
12. (OSK 2007) Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ....
13. (OSK 2005) Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m,n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.
14. (OSK 2002) Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah ...
15. (OSK 2002) Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$?
16. (OSK 2009) Banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ untuk suatu bilangan ganjil x dan y adalah ....
17. (OSK 2004) Untuk dua bilangan bulat a dan b, penulisan a * b menyatakan

sisa tak negatif ab jika dibagi 5. Nilai (−3) * 4 = ...

18. (OSK 2004) Untuk a dan b bilangan bulat dengan a tidak nol. Pernyataan berikut yang *salah* adalah
    A. Jika $a|b$ & $a|c$, maka $a|(bc)$
    B. Jika $a|c$ & $b|c$, maka $(ab)|c$
    C. Jika $a|b$ & $a|c$, maka $a|(b+c)$
    D. Untuk setiap bilangan bulat $a \neq 0$ berlaku $a|0$
    E. Jika $a|b$, maka $a|(bc)$ untuk setiap bilangan bulat c
19. (OSK 2003) Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N?
20. (OSK 2002) Berapakah jumlah digit-digit bilangan $2^{2002}.5^{2003}$?
21. (OSK 2002) Berapa banyak bilangan positif yang kurang dari 10.000 yang berbentuk $x^8 + y^8$ untuk suatu bilangan bulat x>0 dan y>0?
22. (OSP 2002) Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan $1^5 - 1, 2^5 - 2, ..., n^5 - n, ...$?
23. (OSP 2002) Jika $2002 = a_1 + a_2.2! + a_3.3! + ... + a_n.n!$, dimana a_k adalah bilangan bulat, $0 \le a_k \le k$, $k = 1, 2, 3, ..., n, \& a_n \neq 0$, tentukan pasangan terurut (n, a_n).
24. (OSP 2002) Tentukan semua bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif.
25. (OSP 2003) Berapakah sisa pembagian $1.1! + 2.2! + 3.3! + ... + 99.99! + 100.100!$ oleh 101?
26. (OSP 2003) Tentukan semua bilangan bulat a dan b sehingga bilangan $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ merupakan bilangan rasional.
27. (OSP 2004) Tentukan himpunan semua bilangan asli n sehingga n(n − 1)(2n − 1) habis dibagi 6.
28. (OSP 2005) Jika a, b dua bilangan asli $a \le b$ sehingga $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan terurut (a,b) =....
29. (OSP 2007) Himpunan semua bilangan asli n sehingga 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah .....
30. (OSP 2011) Bilangan asli n yang memenuhi $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 2000 adalah ...
31. (OSN 2002) Buktikan bahwa $n^4 - n^2$ habis dibagi 12 untuk sebarang bilangan bulat n>1.
32. (OSN 2003) Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat a.
33. (OSN 2005) Untuk sebarang bilangan asli n, didefinisikan p(n) sebagai hasil kali digit-digit n (dalam representasi basis 10). Tentukan semua bilangan asli n sehingga 11 · p(n) = n^2 − 2005.
34. (OSN 2006) Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan asli. Jika $30 | (a+b+c)$, buktikan bahwa $30 \,\big|\, (a^5 + b^5 + c^5)$
35. (OSN 2008) Misalkan m,n>1 bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga n

membagi $4^m - 1$ dan 2^m membagi n-1. Haruskah $n = 2^m + 1$? Jelaskan.

36. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Bilangan 6 digit a1989b habis dibagi 72. Tentukan nilai a dan b

3. Bilangan Prima & Teorema Dasar Aritmatika

Definisi

Suatu Bilangan Prima adalah bilangan bulat positif lebih dari 1 yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan dirinya sendiri.

Definisi

Suatu bilangan bulat positif yang lebih dari 1 yang bukan *prima* disebut komposit.

Contoh 1:

Bilangan 2, 3, 5, 13, 101, dan 163 merupakan bilangan prima. Sedangkan bilangan 4=2.2, 8=4.2, 33=3.11, 111=3.37, dan 1001=7.11.13 merupakan komposit.

Lemma

Setiap bilangan bulat positif lebih dari 1 mempunyai pembagi prima.

Teorema

Ada tak hingga banyak bilangan prima.

Teorema

Jika n merupakan komposit, maka n mempunyai faktor prima tidak lebih dari $\sqrt{n}$.

Contoh 2:

Tentukan apakah 171 dan 199 merupakan bilangan prima atau komposit?

- ✓ $\sqrt{171} = 13{,}077$. Bilangan prima yang kurang dari $\sqrt{171}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 171 habis dibagi 3, maka 171 adalah bilangan komposit.
- ✓ $\sqrt{199} = 14{,}107$. Bilangan prima yang kurang dari $\sqrt{199}$ adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13. Karena 199 tidak habis dibagi oleh 2, 3, 5, 7, 11, dan 13, maka 199 adalah bilangan prima.

Teorema Dasar Aritmatika (Faktorisasi Prima)

Setiap bilangan bulat positif $n > 1$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $n = p_1^{a_1} . p_2^{a_2} . \ldots . p_k^{a_k}$ dengan k suatu bilangan asli, $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ bilangan-bilangan prima berbeda, dan $a_i \geq 1$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Contoh 3:

Faktorisasi dari beberapa bilangan bulat positif diberikan sebagai berikut:

- ✓ $240 = 2.2.2.2.3.5 = 2^4.3.5$
- ✓ $289 = 17.17 = 17^2$
- ✓ $1001 = 7.11.13$

Teorema Dasar Aritmatika sering digunakan dalam soal-soal olimpiade untuk menentukan faktor dari suatu bilangan bulat yang tidak diketahui. Berikut akibat dari Teorema Dasar tersebut:

- ✓ n mempunyai k faktor prima yaitu: $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
- ✓ Banyak faktor positif dari n adalah $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_k + 1)$.

✓ Banyaknya cara berbeda untuk memfaktorkan n adalah $\frac{1}{2}(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_k+1)$.

Contoh berikut merupakan aplikasi dari faktorisasi prima untuk mencari semua pembagi suatu bilangan.

Contoh 4:

Pembagi positif dari $120 = 2^3.3.5$ adalah bilangan bulat positif dengan faktorisasi prima berpangkat yang memuat bilangan prima 2, 3, dan 5 dengan pangkat kurang dari atau sama dengan berturut-turut 3, 1, dan 1. Sehingga, pembagi bilangan 120 adalah:

1	3	5	3. 5 = 15
2	2.3 = 6	2.5 = 10	2.3.5 = 30
2^2=4	2^2.3=12	2^2.5=20	2^2.3.5=60
2^3=8	2^3.3=24	2^3.5=40	2^3.3.5=120

Jika, soal ini dikerjakan dengan akibat teorema dasar seperti yang tertuang di atas, maka: 120 mempunyai sebanyak $(3+1)(1+1)(1+1)=16$ pembagi/faktor positif.

Contoh 5:

Carilah bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi kedua persamaan
$$\begin{cases} xy = 40 \\ 31 = 2x+3y \end{cases}.$$

Pembahasan:

Perhatikn bahwa $40 = 2^3.5$, terdapat (3+1) (1+1)=8 kemungkinan pasangan (x,y) yaitu, $(1,40),(2,20),(4,10),(8,5),(5,8),(10,4),(20,2),(40,1)$. Kita mudah membuktikan bahwa hanya (x,y)=(8, 5) yang jika ditambahkan akan memenuhi $31 = 2x+3y$.

Contoh 6:

(AHSME 1998) Misalkan bilangan 1998 ditulis sebagai suatu hasil kali dari du bilangan bulat positif yang selisihnya sekecil mungkin. Berapakah selisih tersebut?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa, $1998 = 2.3^3.37$.Sehingga terdapat $(1+1)(3+1)(1+1)/2 = 8$ faktorisasi dari 1998, dengan menganggap bahwa urutan faktor tidak penting. Faktorisasinya adalah:
$1.1998, 2.999, 3.666, 6.333, 9.222, 18.111, \& 37.54$. Selisih terkecil terjadi ketika faktornya hampir sama, yaitu 54-37=17.

Contoh 7:

(AMC 10A/2005) Berapa banyak bilangan pangkat tiga yang membagi $3!\,5!\,7!$?
(Dimana $a! = 1.2.3....(a-1)\,a$)

Pembahasan:

Dengan menuliskan sebagai hasil kali prima, maka
$$3!\,5!\,7! = 2^8\,3^4\,5^2\,7.$$
Sebuah bilangan berpangkat tiga yang merupakan suatu faktor memiliki faktorisasi prima berbentuk $2^p\,3^q\,5^r\,7^s$, dengan p,q,r dan s seluruhnya adalah bilangan kelipatan 3. Terdapat 3 nilai yang mungkin untuk p, yaitu 0, 3, dan 6. Terdapat 2 nilai yang mungkin untuk q, yaitu 0 dan 3. Satu-satunya nilai untuk r dan s adalah 0. Oleh karena itu terdapat 6=3.2.1.1 bilangan pangkat tiga berbeda yang membagi $3!\,5!\,7!$.

Bilangan-bilangan itu adalah $1 = 2^0 3^0 5^0 7^0$, $8 = 2^3 3^0 5^0 7^0$, $27 = 2^0 3^3 5^0 7^0$, $64 = 2^6 3^0 5^0 7^0$, $216 = 2^3 3^3 5^0 7^0$, $\& \, 1728 = 2^6 3^3 5^0 7^0$

Contoh 8:

(OSP/2012) Misalkan $x, y, \, dan \, z$ adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan $34x - 51y = 2012\,z$. Nilai dari $x + y + z$ adalah ....

Pembahasan:

$34x - 51y = 2012\,z$ dengan x, y, dan z bilangan prima.
Karena 34 dan 2012 habis dibagi 2 serta 51 tidak habis 2, maka haruslah y habis dibagi 2. Karena y prima, maka y =2.

Karena 34 dan 51 habis dibagi 17 serta 2012 tidak habis dibagi 17, maka z haruslah habis dibagi 17. Karena z prima, maka z = 17.

Karena y = 2, z = 17, x harus prima, maka x = 1009.
$x + y + z = 1028.$

Contoh 9:

(OSK, Tipe 1&3/2011) Ada berapa faktor positif dari $2^7.3^5.5^3.7^2$ yang merupakan kelipatan 10?

Pembahasan:

Supaya bilangan $2^7 3^5 5^3 7^2$ merupakan kelipatan 10, maka bilangan tersebut dapat ditulis dalam bentuk: $2.5\,(2^6.3^5.5^2.7^2)$, maka banyaknya faktor positif yang merupakan kelipatan 10 adalah $(6+1)(5+1)(2+1)(2+1) = 378$ faktor.

Contoh 10:

Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat $n > 1$, maka bilangan $n^5 + n^4 + 1$ bukan prima.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa, kita memiliki:

$$
\begin{aligned}
n^5 + n^4 + 1 &= n^5 + n^4 + n^3 - n^3 - n^2 - n + n^2 + n + 1 \\
&= n^3(n^2 + n + 1) - n(n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 1) \\
&= (n^2 + n + 1)\,(n^3 - n + 1)
\end{aligned}
$$

merupakan perkalian dua bilangan bulat lebih dari 1.
Jadi, bilangan $n^5 + n^4 + 1$ bukan prima.

LATIHAN 3A

1. (OSK,2013) Misalkan p dan q bilangan prima. Jika diketahui persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ mempunyai akar-akar bilangan bulat, maka nilai $p + q$ adalah ...
2. (OSK, Tipe 1&3/2012) Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6?
3. (OSK, Tipe 1/2011) Tentukan semua bilangan bulat positif p sedemikian sehingga p, p + 8, p + 16 adalah bilangan prima.
4. (OSK 2010) Misalkan S menyatakan himpunan semua faktor positif dari 2010^2. Sebuah bilangan diambil secara acak dari S. Peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah ...
5. (OSK 2009) Banyaknya pasangan bilangan asli (x,y) sehingga $x^4 + 4y^4$ merupakan bilangan prima adalah ...
6. (OSK 2008) Banyaknya faktor positif dari 5! Adalah ...
7. (OSK 2007) Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari

2007. Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah ....
8. (OSK 2006) Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih dari 50 adalah
9. (OSK 2005) Faktor prima terbesar dari 2005 adalah .....
10. (OSK 2004) Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak ...
11. (OSK 2003) Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai $a^2 + b^2$? (diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)
12. (OSP 2011) Jika n bilangan asli dan $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka pembagi positif dari n sebanyak ...
13. (OSP 2011) Jika kedua akar persmaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah ....
14. (OSP 2010) Bilangan prima p sehingga $p^2 + 7^3$ merupakan bilangan kubik sebanyak ....
15. (OSP 2010) Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n, bilangan prima (tidak harus berbeda) $q_1, q_2, q_3, ..., q_k$, dan bilangan prima berbeda $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$ yang memenuhi $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_k}=\frac{7+nq_1q_2...q_k}{2010}$. Tentukan banyaknya n yang memenuhi.
16. (OSP 2009) Bilangan prima p yang memenuhi $(2p-1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ ada sebanyak ...
17. (OSP 2009) Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor dan n merupakan kelipatan 2009. Faktor prima terkeci dari n adalah ......
18. (OSP 2009) Diketahui p adalah bilangan prima sehingga persamaan $7p = 8x^2 - 1$ dan $p^2 = 2y^2 - 1$ mempunyai solusi x dan y berupa bilangan bulat. Tentukan semua nilai p yang memenuhi.
19. (OSP 2008) Banyaknya pembagi positif dari 2008 adalah ......
20. (OSP 2007) Di antara bilangan-bilangan 2006, 2007 dan 2008, bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah ....
21. (OSP 2006) Bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan jumlah dua bilangan prima lainnya adalah ....
22. (OSP 2005) Jumlah sepuluh bilangan prima yang pertama adalah .....
23. (OSP 2004) Dedefinisikan a o b = a + b + ab, untuk semua bilangan bulat a, b. Kita katakan bahwa bilangan bulat a adalah *faktor* dari bilangan bulat c bilamana terdapat bilangan bulat b yang memenuhi a o b = c. Tentukan semua faktor positif dari 67.
24. (OSP 2003) Misalkan m dan n dua bilangan asli yang memenuhi $m^2 - 2003 = n^2$. Berapakah mn?
25. (OSP 2002) Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari M − m ?
26. (OSP 2013) Pasangan bilangan bulat posistif (x, y) yang memenuhi $\frac{xy^2}{x+y}$ bilangan prima adalah ....

LATIHAN 3B

1. (AHSME 1999) Berapakah hasil penjumlahan angka-angka desimal yang

terbentuk dari hasil kali $2^{2004}.5^{2006}$?

2. (AMC 10B/2002) Bilangan $25^{64}.64^{25}$ adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat positif N. Berapakah hasil penjumlahan angka-angka desimal dari N?
3. (AMC 12A/2002) Kedua akar persamaan kuadrat $x^2 - 63x + k = 0$ adalah bilangan prima. Berapa banyak kemungkinan nilai k?
4. (AMC 12B/2002) Berapa banyakkah bilangan bulat positif sedemikian sehingga $n^2 - 3n + 2$ merupakan bilangan prima?
5. (AMC 12B/2002) Bilangan bulat positif A, B, A-B, dan A+B masing-masing adalah bilangan prima. Tentukan jumlah 4 bilangan prima tersebut?
6. (AHSME 1986) Misal $N = 69^5 + 5.69^4 + 10.69^3 + 10.69^2 + 5.69 + 1$. Berapa banyak bilangan bulat positif yang merupakan faktor dari N?
7. (AMC 12A/2003) Berapa banyakkah kuadrat sempurna merupakan pembagi dari hasil kali $1!\,2!\,3!\ldots 9!$? (Dimana $a! = 1.2.3....(a-1)\,a$)
8. (AMC 12B/2003) Misal x dan y merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $7x^5 = 11y^{13}$. Kemungkinan nilai x minimal ini mempunyai faktorisasi prima $a^c b^d$. Berapa nilai a+b+c+d?
9. (AHSME 1990) Berapa banyakkah bilangan bulat positif kurang dari 50 yang banyaknya pembagi bilangan bulat positifnya ganjil?
10. (AHSME 1996) Misalkan n adalah sebuah bilangan bulat positif sehingga 2n memiliki 28 pembagi positif dan 3n memiliki 30 pembagi positif. Berapa banyaknya pembagi positif yang dimiliki oleh 6n?
11. (AMC 12B/2004) Jika x dan y merupakan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $2^x 3^y = 1296$, berapa nilai x+y?
12. (AHSME 1998) Berapa banyak bilangan prima berbeda yang merupakan faktor N jika ${}^2\log\left({}^3\log\left({}^5\log\left({}^7\log N\right)\right)\right) = 11$?
13. (AHSME 1974) Berapa bilangan prima terkecil sedemikian sehingga membagi bilangan $3^{11} + 5^{13}$?

4. FPB & KPK

a. FAKTOR PERSEKUTUAN TERBESAR (FPB)

Definisi

FPB dari dua bilangan bulat a dan b, yang keduanya tidak nol, adalah bilangan bulat terbesar yang membagi a dan juga b.

FPB dari a dan b ditulis sebagai (a,b). Kita juga mendefinisikan bahwa (0, 0)=0.

Dari definisi di atas, kita peroleh: Jika bilangan d disebut FPB antara a dan b, maka berlaku:

- $d \mid a$ & $d \mid b$
- Untuk setiap bilangan asli c dengan $c \mid a$ & $c \mid b$ haruslah berlaku $c \le d$.

Contoh 1:

Pembagi sekutu dari 24 dan 84 adalah $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \& \pm 12$. Jadi, $(24, 84) = 12$. Dengan cara yang sama, untuk mencari pembagi sekutu maka kita dapat:

$(15, 81) = 3, (100, 5) = 5, (17, 25) = 1, (0, 44) = 44, (-6, -15) = 3, \& (-17, 289) = 17.$

Definisi

Bilangan bulat a dan b disebut *relatif prima* jika a dan b memiliki $(a, b) = 1$.

Contoh 2:

Karena $(25, 42) = 1$, maka 25 dan 42 *relatif prima*.

Teorema

Misalkan a, b, dan c bilangan bulat dengan $(a, b) = d$. Maka

- $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$
- $(a + cb, b) = (a, b)$

Definisi

Jika a dan b bilangan bulat, maka *kombinasi linear* dari a dan b adalah jumlah yang berbentuk $m\,a + n\,b$, dimana m dan n keduanya bilangan bulat.

Teorema

FPB dari bilangan bulat a dan b, yang keduanya tidak nol adalah bilangan bulat terkecil, yaitu merupakan kombinasi linear dari a dan b.

Definisi

Misal $a_1, a_2, ..., a_n$ bilangan bulat yang kesemuanya tidak nol. FPB dari bilangan bulat tersebut adalah bilangan bulat terbesar yang membagi semua bilangan bulat tersebut. FPB dari $a_1, a_2, ..., a_n$ ditulis sebagai $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Contoh 3:

Kita dapat melihat secara mudah bahwa, $(12, 18, 30) = 6$ & $(1015, 25) = 5$.

Lemma

Misal $a_1, a_2, ..., a_n$ bilangan bulat yang kesemuanya tidak nol, maka $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n) = (a_1, a_2, ..., a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n))$.

Contoh 4:

Untuk menentukan FPB dari tiga bilangan 105, 140, dan 350, kita gunakan lemma di atas. Perhatikan bahwa $(105, 140, 350) = (105, (140, 350)) = (105, 70) = 35$.

Algoritma Euclid

Teorema:

Misal $r_o = a$ & $r_1 = b$ merupakan bilangan bulat sedemikian sehingga $a \geq b > 0$. Jika algoritma pembagian diterapkan secara berulang-ulang maka kita dapatkan $r_j = r_{j+1}\, q_{j+1} + r_{j+2}$ dengan $0 < r_{j+2} < r_{j+1}$ untuk $j = 0, 1, 2, ..., n-2$ dan $r_{n+1} = 0$, maka $(a, b) = r_n$ *{sisa terakhir tidak nol}*

Contoh 5:

Untuk menghitung nilai $(252, 198)$, kita menggunakan algoritma pembagian secara berulang.

$$252 = 1.198 + 54$$
$$198 = 3.54 + 36$$
$$54 = 1.36 + 18$$

$$36 = 2.18.$$

Jadi, menurut algoritma euclid kita peroleh $(252, 198) = 18$.

Contoh 6:

Diketahui $FPB(15, 24) = 3$. Cari salah satu pasangan bilangan bulat (x,y) sehingga $15x + 24y = 3$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $24 = 1.15 + 9$

$15 = 1.9 + 6$

$9 = 1.6 + 3$

(ingat mencari FPB dengan algoritma euclid)

Dengan demikian,

$$3 = 9 - 1.6 = 9 - (15 - 1.9) = 2.9 - 15 = 2(24 - 15) - 15 = 2.24 - 3.15$$

Kita dapat mengambil x = -3 dan y =2.

b. KELIPATAN PERSEKUTUAN TERKECIL (KPK)

Definisi

KPK dari dua bilangan bulat a dan b adalah bilangan bulat positif terkecil yang habis dibagi oleh a dan b. KPK antara a dan b ditulis dengan simbol $[a, b]$.

Contoh 7:

Kita memiliki nilai KPK berikut: $[15, 21] = 105$, $[24, 36] = 72$, $[2, 20] = 20$, dan $[7, 11] = 77$.

Ingat kembali faktorisasi prima dari suatu bilangan bulat positif lebih dari 1. Konsep ini dapat kita terapkan untuk mencari FPB dan KPK dua bilangan bulat a dan b. Jika $a = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}....p_n^{a_n}$ dan $a = p_1^{b_1}.p_2^{b_2}....p_n^{b_n}$ dimana $p_1, p_2, ..., p_n$ bilangan prima dengan $p_1 < p_2 < ... < p_n$ dan $a_i, b_i \in \{0 \cup \mathrm{N}\}$ untuk $i = 1, 2, ..., n$. Maka

- ✓ FPB antara a dan b: $(a, b) = p_1^{\min(a_1, b_1)}.p_2^{\min(a_2, b_2)}.... p_n^{\min(a_n, b_n)}$
- ✓ KPK antara a dan b: $[a, b] = p_1^{\max(a_1, b_1)}.p_2^{\max(a_2, b_2)}.... p_n^{\max(a_n, b_n)}$

Contoh 8:

Perhatikan faktorisasi prima dari $720 = 2^4.3^2.5$ dan $2100 = 2^2.3.5^2.7$. Dari faktorisasi prima tersebut, maka: $(720, 2100) = 2^2.3.5 = 60$ sedangkan $[720, 2100] = 2^4.3^2.5^2.7 = 25,200$.

Teorema

Jika a dan b bilangan bulat, maka $[a, b] = \dfrac{ab}{(a, b)}$.

Contoh 9:

Tentukan semua pasangan bilangan bulat (m,n) sedemikian sehingga bilangan $A = n^2 + 2mn + 3m^2 + 2$, $B = 2n^2 + 2mn + 3m^2 + 2$, $B = 3n^2 + 2mn + 3m^2 + 1$ mempunyai pembagi persekutuan lebih dari 1.

Pembahasan:

Pembagi persekutuan untuk A, B, dan C juga merupakan pembagi untuk:

$D = 2A - B$

$E = 3A - C$
$F = 5E - 7D$
$G = 5D - E$
$H = 18A - 2F - 3E$
$I = nG - mF$
$126 = 18nI - 5H + 11F = 2.3^2.7.$

Karena 2 dan 3 tidak membagi A, B, dan C, maka $d = 7$.
Jadi, $(m, n) = (7a + 2,\ 7b + 3)\ atau\ (7c + 5,\ 7d + 4)$

Contoh 10:
(Canadian Mathematical Olympiad 1973) Buktikan bahwa jika p dan p+2 keduanya bilangan prima lebih besar dari 3, maka 6 merupakan faktor dari p + 1.
Pembahasan:

- ✓ Karena p dan p + 2 bilangan prima lebih dari 3, maka jelas bahwa keduanya tidak habis dibagi 2. Dan kita dapat menyatakan bahwa:
  $p = 2k + 1,\ \ p + 2 = 2k + 3$ untuk suatu $k \in Z$.
  Dari kondisi tersebut di atas, maka:
  $p + 1 = 2k + 2 = 2(k + 1)$, hal ini berarti $2|(p + 1)$......... (1)

- ✓ Karena p dan p + 2 bilangan prima lebih dari 3, maka jelas bahwa keduanya tidak habis dibagi 3. Dan kita dapat menyatakan bahwa:
  $p = 3n + 1\ \ atau\ \ p = 3n + 2$ untuk suatu $n \in Z$. Akan tetapi jika $p = 3n + 1$, maka $p + 2 = 3(n + 1)$, p+2 habis dibagi 3 (kontradiksi)

  Sehingga jelas bahwa $p = 3n + 2$.
  $p + 1 = 3(n + 1)\ \rightarrow\ 3|(p + 1)$ ....(2).

  Dari (1) dan (2), maka $6|(p + 1)$ ini berarti 6 faktor dari p+1.

LATIHAN 4A

1. Misalkan a bilangan bulat positif, Berapa nilai dari $(a, 2a)$?
2. Misalkan a bilangan bulat positif, Berapa nilai dari $(a, a+1)$?
3. Buktikan bahwa jika $(a,b) = 1$ dan $a \mid bc$, maka $a \mid c$.
4. Jika $(a, m) = (b, m) = 1$, maka buktikan bahwa $(ab, m) = 1$.
5. Tunjukkan bahwa jika a dan b bilangan bulat yang keduanya tidak nol, dan c bilangan bulat tidak nol, maka $(ca, cb) = |c|\,(a, b)$.
6. Berapa nilai dari $(a^2 + b^2, a + b)$ dimana a dan b bilangan bulat relatif prima yang keduanya tidak nol.
7. Tunjukkan bahwa jika a bilangan genap dan b bilangan ganjil, maka $(a, b) = \left(\frac{a}{2}, b\right)$.
8. Gunakan algoritma euclid untuk menentukan FPB bilangan-bilangan berikut:
   - $(45,\ 75)$
   - $(102,\ 222)$
   - $(666,\ 1414)$
9. Tunjukkan bahwa jika a dan b bilangan bulat positif, maka $(a, b) \mid [a, b]$.
10. Tunjukkan bahwa jika a, b, dan c bilangan bulat, maka $[a, b] \mid c$ jika dan

hanya jika $a|c$ & $b|c$.

11. Tunjukkan bahwa 101 bilangan prima.
12. Nyatakan $(252,198)=18$ sebagai kombinasi linear dari 252 dan 198.
13. Tentukan bilangan bulat positif lebih dari 1 yang bersisa 1 ketika dibagi k untuk setiap $2 \le k \le 10$.
14. (OSK, Tipe 1&3/2011) Bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2,3,4,5,6,7,8,9,10 adalah $\cdots\cdots$
15. (OSK 2009) Nilai dari $\sum_{k=1}^{2009} FPB\,(k,\ 7)$ adalah ...
16. (OSK 2008) Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah $\cdots\cdots$
17. (OSP 2010) Banyaknya anggota himpunan $S=\left\{FPB\left(n^3+1,\ n^2+3n+9\right)\middle|\ n\in \mathbb{Z}\right\}$ adalah ...
18. (OSP 2008) Banyak bilangan bulat positif n kurang dari 2008 yang mempunyai tepat n/2 bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadapat n adalah ...
19. (OSP 2007) Misalkan a dan b dua bilangan asli, yang satu bukan kelipatan yang lainnya. Misalkan pula KPK(a, b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a, b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a, b). Tentukan b terbesar yang mungkin.
    [KPK : Kelipatan Persejutuan terKecil; FPB : Faktor (pembagi) Persekutuan terBesar]
20. (OSP 2006) Misalkan $d=FPB(7n+5,\ 5n+4)$ dimana n adalah bilangan asli.
    a. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku d =1 atau 3.
    b. Buktikan bahwa d=3 jika dan hanya jika n=3k+1, untuk suatu bilangan asli k.
21. (OSP 2004) Notasi fpb(a, b) menyatakan *faktor persekutuan terbesar* dari bilangan bulat a dan b. Tiga bilangan asli $a_1<a_2<a_3$ memenuhi $fpb(a_1,a_2,a_3)=1$, tetapi $fpb(a_i,a_j)>1$ jika $i\ne j,\ i,j=1,2,3$. Tentukan (a_1,a_2,a_3) agar $a_1+a_2+a_3$ minimal.
22. (OSP 2003) Misalkan x, y, z tiga bilangan asli berbeda. Faktor persekutuan terbesar ketiganya adalah 12, sedangkan kelipatannya persekutuan terkecil ketiganya adalah 840. Berapakah nilai terbesar bagi x + y + z ?
23. (OSP 2002) Bilangan real $2,525252\ldots$ adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m,n bilangan bulat, $n\ne 0$. Jika dipilih m dan n relatif prima , berapakah m+n?
24. (OSP 2012) Banyaka bilangan asli $n<100$ yang mempunyai kelipatan yang berbentuk 123456789123456789 ...123456789 adalah ....
25. (OSP 2013) Bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi FPB(a,b)=1 dan $\frac{a}{b}+\frac{25b}{21a}$ bilangan bulat ada sebanyak ....

5. Bilangan Kuadrat dan Kubik Sempurna

Definisi

Bilangan cacah, n disebut *bilangan kuadrat sempurna* jika ada bilangan bulat m sedemikian sehingga $n = m^2$. Dan biasanya hanya disebut *kuadrat sempurna*.

Bilangan cacah, n disebut *bilangan kubik sempurna* jika ada bilangan bulat m sedemikian sehingga $n = m^3$. Dan biasanya hanya disebut *kubik sempurna*.

Sifat-sifat Dasar Bilangan Kuadrat Sempurna

- Angka satuan yang mungkin dari bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, dan 9.
- Jika faktorisasi prima n adalah $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}....p_k^{a_k}$, maka n disebut kuadrat sempurna $\Leftrightarrow$ setiap a_i genap $\Leftrightarrow$ $\tau(n)$ ganjil, dimana $\tau(n)$ menyatakan banyaknya pembagi positif dari n.
- Setiap bilangan kuadrat sempurna dibagi 2, 3, atau 4 maka sisanya 0 atau 1.
- Setiap bilangan kuadrat sempurna dibagi 8 maka sisanya 0, 1, atau 4.
- Bilangan kuadrat sempurna ganjil harus mempunyai digit puluhan genap.
- Jika digit puluhan suatu bilangan kuadrat sempurna adalah ganjil, maka angka satuan bilangan kuadrat ini adalah 6.
- Tidak ada bilangan kuadrat sempurna di antara dua bilangan kuadrat berurutan.
- Jika p bilangan prima dan $p \mid n$ maka $p^2 \mid n^2$.

Secara umum kita definisikan bilangan pangkat sempurna (a *Perfect Power*):

Suatu bilangan cacah n dikatakan "*a perfect power/pangkat sempurna*" jika $n = m^s$ untuk suatu bilangan bulat m dan s, $s \geq 2$.

Suatu bilangan cacah n disebut bilangan pangkat ke-s sempurna jika dan hanya jika semua eksponen dalam faktorisasi primanya dapat dibagi oleh s.

Contoh 1:

(CHINA/2002) Diketahui lima digit $\overline{2x9y1}$ adalah bilangan kuadrat. Tentukan nilai dari $3x + 7y$.

Pembahasan:

Misalkan $A^2 = \overline{2x9y1}$. Karena $141^2 = 19881 < A^2$ & $175^2 = 30625 > A^2$, sehingga $141^2 < A^2 < 175^2$. Angka satuan dari A yang mungkin adalah 1 atau 9. Sehingga, kita hanya mengecek bilangan $151^2, 161^2, 171^2, 159^2, 169^2$. Sekarang kita menemukan bahwa $161^2 = 25921$, dan 4 bilangan yang lain tidak memenuhi. Sehingga $x = 5, y = 2 \Rightarrow 3x + 7y = 29$.

Contoh 2:

(CHINA/1991) Tentukan semua bilangan asli n sedemikian sehingga $n^2 - 19n + 91$ merupakan kuadrat sempurna.

Pembahasan:

- Jika n > 10, maka n – 9 >0, sehingga
  $n^2 - 19n + 91 = n^2 - 20n + 100 + (n-9) = (n-10)^2 + (n-9) > (n-10)^2$, dan
  $n^2 - 19n + 91 = n^2 - 18n + 81 + (10-n) = (n-9)^2 + (10-n) < (n-9)^2$, sehingga
  $(n-10)^2 < n^2 - 19n + 91 < (n-9)^2$, ini mengakibatkan bahwa $n^2 - 19n + 91$ bukan bilangan kuadrat.

- Jika n < 9, maka
  $n^2 - 19n + 91 = (10-n)^2 + (n-9) < (10-n)^2$, dan
  $n^2 - 19n + 91 = (9-n)^2 + (10-n) > (9-n)^2$, sehingga
  $(9-n)^2 < n^2 - 19n + 91 < (10-n)^2$, ini mengakibatkan bahwa $n^2 - 19n + 91$ bukan bilangan kuadrat.
- Jika n = 9, maka
  $n^2 - 19n + 91 = 1$ (Bilangan kuadrat)
- Jika n =10, maka
  $n^2 - 19n + 91 = 1$ (Bilangan kuadrat)

Jadi, $n^2 - 19n + 91$ merupakan kuadrat sempurna jika dan hanya jika n =9 atau n =10.

Contoh 3:
Tentukan semua bilangan bulat n sehingga $n - 50$ dan $n + 50$ keduanya merupakan kuadrat sempurna
Pembahasan:
Misalkan $n - 50 = a^2$ dan $n + 50 = b^2$.
Maka $b^2 - a^2 = 100,\ \ (b-a)(b+a) = 2^2.5^2$.
Karena (b-a) dan (b+a) bilangan yang berbeda dan mempunyai paritas yang sama, maka kemungkinan hanya $b - a = 2\ \&\ b + a = 50$ (yakni, b=26 dan a = 24).
Jadi, nilai n yang memenuhi hanya n = 626.

Contoh 4:
(Romanian Mathematical Olympiad 2004) Tentukan semua bilangan bulat non-negatif n sedemikian sehingga ada bilangan bulat a dan b dengan sifat $n^2 = a + b$ dan $n^3 = a^2 + b^2$.
Pembahasan:
Dari ketaksamaan $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, kita peroleh: $2n^3 \geq n^4$, yakni $n \leq 2$.
Sehingga perhatikan bahwa:
- Untuk n = 0, kita pilih a = b = 0
- Untuk n = 1, kita pilih a = 1, b = 0
- Untuk n = 2, kita pilih a = b = 2.

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 0, 1, 2.

Contoh 5:
Buktikan bahwa bilangan $\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots22}_{1998}5$ merupakan kuadrat sempurna
Pembahasan:
$$N = \underbrace{11\ldots11}_{1997}\,10^{1999} + \underbrace{22\ldots22}_{1998}.10 + 5$$
$$= \frac{1}{9}(10^{1997} - 1).10^{1999} + \frac{2}{9}(10^{1999} - 1).10 + 5$$
$$= \frac{1}{9}(10^{3996} + 2.5.10^{1998} + 25) = \left(\frac{1}{3}[10^{1998} + 5]\right)^2 = \left(\frac{\overbrace{100\ldots00}^{1997}5}{3}\right)^2 = \underbrace{33\ldots33}_{1997}5^2.$$

Contoh 5:
Buktikan bahwa jika n kubik sempurna, maka $n^2 + 3n + 3$ bukan kubik sempurna
Pembahasan:
Andaikan $n^2 + 3n + 3$ kubik sempurna.
Maka $n(n^2 + 3n + 3)$ adalah kubik sempurna.

Perhatikan bahwa:

$$n(n^2 + 3n + 3) = n^3 + 3n^2 + 3n = (n + 1)^3 - 1.$$

Dan jelas bahwa $(n + 1)^3 - 1$ bukan kubik sempurna. Hal ini suatu kontradiksi.

Jadi, jika n kubik sempurna, maka $n^2 + 3n + 3$ bukan kubik sempurna

Contoh 6:

Misalkan m bilangan bulat positif. Tentukan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $m + n + 1$ kuadrat sempurna dan $mn + 1$ kubik sempurna.

Pembahasan:

Pilih $n = m^2 + 3m + 3$, kita memiliki:

$$m + n + 1 = m^2 + 4m + 4 = (m + 2)^2$$

dan

$$mn + 1 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3.$$

LATIHAN 5A

1. (OSK, Tipe 2/2012) Bilangan bulat positif terkecil a sehingga $4a + 8a + 12a + \cdots + 2012a$ merupakan kuadrat sempurna adalah ....
2. (OSK, Tipe 1 &3/2011) Bilangan bulat positif terkecil a sehingga $2a + 4a + 6a + ... + 200a$ merupakan kuadrat sempurna adalah ...
3. (OSK 2010) Diketahui bahwa tepat 1 bilangan asli n sehingga $n^2 + n + 2010$ merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah ....
4. (OSP 2012) Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika S adalah himpunan semua bilangan asli n yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat maka S = ...
5. (OSP 2005) Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah .....
6. Tentukan jika ada bilangan asli k sedemikian sehingga jumlah dua bilangan $3k^2 + 3k - 4$ & $7k^2 - 3k + 1$ merupakan kuadrat sempurna.
7. Jika $(x-1)(x+3)(x-4)(x-8)+m$ merupakan kuadrat sempurna, maka nilai m adalah ...
8. (CHINA/2006) Jika $n + 20$ & $n - 21$ keduanya merupakan kuadrat sempurna, dimana n bilangan asli, maka nilai n sama dengan ...
9. Jika jumlah 2009 bilangan bulat positif merupakan kuadrat sempurna dan misalkan bilangan terbesar dari 2009 bilangan tersebut adalah M, Tentukan nilai minimum dari M.
10. (CHNMOL/2004) Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x,y) , sehingga $N = 23x + 92y$ maerupakan kuadrat sempurna yang kurang dari atau sama dengan 2.392.
11. (OSP, 2013) Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi $n^2 - 600$ merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ....

6. Kongruensi/Modulo

Konsep tentang kongruensi ini banyak digunakan dalam menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan mencari sisa suatu bilangan jika dibagi dengan bilangan lain atau mencari angka satuan suatu bilangan. Dan sebagian besar soal tentang teori bilangan pada olimpiade matematika sering menggunakan konsep kongruensi ini. Sebenarnya konsep ini telah diberikan pada waktu di SD, yaitu konsep bilangan jam. Mari kita

pelajari konsep ini secara mendalam dan aplikasinya juga.

Definisi
Misalkan m bilangan bulat tidak nol. Jika a dan b bilangan bulat, kita katakn bahwa a *kongruen* b modulo m jika $m \mid (a-b)$.

Jika a kongruen b modulo m, kita notasikan sebagai $a \equiv b \pmod{m}$. Jika $m \nmid (a-b)$, kita katakan bahwa a dan b *tidak kongruen modulo m*, dan kita notasikan sebagai $a \not\equiv b\ (mod\ m)$

Secara umum, $a \equiv a\ (mod\ m)$ untuk sebarang $m > 0$ dan $a \equiv 0\ (mod\ m)$ jika $m|a$.

Contoh 1:
Kita memiliki $22 \equiv 4 \pmod 9$ karena $9|(22-4) = 18$. Dan juga $3 \equiv -6 \pmod 9$; $200 \equiv 2 \pmod 9$. Tetapi, $3 \not\equiv 5\ (mod\ 9)$ karena $9 \nmid (3-5)$.

Teorema 1
Jika a dan b bilangan bulat, maka $a \equiv b \pmod m$ jika dan hanya jika ada suatu bilangan bulat k sedemikian sehingga $a = km + b$. Dari teorema ini, kita dapat katakan bahwa jika $a \equiv b \pmod m$, maka *kita sama saja mencari sisa b ketika a dibagi oleh m.*
Bukti:
Jika $a \equiv b \pmod m$, maka $m \mid (a-b)$. Ini berarti ada suatu bilangan k sedemikian sehingga $a - b = km \Leftrightarrow a = km + b$ (*terbukti*).

Contoh 2:
Buktikan bahwa $(am+b)^n \equiv b^n \pmod m$
Bukti:
Membuktikan bahwa $(am+b)^n \equiv b^n \pmod m$ sama artinya dengan membuktikan ada suatu bilangan bulat k sehingga $(am+b)^n = km + b^n \Leftrightarrow (am+b)^n - b^n = km$.
Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(am+b)^n - b^n &= (am)^n + n(am)^{n-1}b + \ldots + n(am)b^{n-1} + b^n - b^n \\ &= \left(a(am)^{n-1} + nba(am)^{n-2} + \ldots + na\,b^{n-1}\right)m \\ &= k\ m \text{ (terbukti).}\end{aligned}$$

Rumusan pada contoh 2 di atas dapat digunakan menentukan sisa pembagian bilangan yang relatif besar. Untuk aplikasinya, perhatikan contoh 3 di bawah ini.

Contoh 3:
Tentukan sisa pembagian jika 8^{2002}dibagi oleh 7.
Pembahasan:
$8^{2002} \equiv (1.7+1)^{2002} \pmod 7 \equiv 1^{2002} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$
Jadi, sisa pembagiannya adalah 1.

Teorema 2
Misalkan a,b,c,d,m, dan n merupakan bilangan bulat, $m \neq 0$, $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$. Maka

a. $a \pm c \equiv b \pm d \pmod m$
b. $ac \equiv bd \pmod m$

c. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$

d. Jika $n|a, n|b, \&\ (m,n)=1$, maka $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \pmod{m}$.

Contoh 4:

Tentukan sisa ketika $2^{73} + 14^3$ dibagi oleh 11.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$2 \equiv 2\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^2 \equiv\ 4\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^4 \equiv\ 4^2 \equiv 16 \equiv 5\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^8 \equiv\ 5^2 \equiv 25 \equiv 3\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{10} \equiv\ 3\ .\ 2^2 \equiv 12 \equiv 1\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{70} \equiv\ 1\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{70}.\,2^3 \equiv\ 8\ (mod\ 11)$

$\Leftrightarrow\ 2^{73} \equiv 8\ (mod\ 11)$ ....(i)

Untuk $14^3 = (11+3)^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 5 (mod\ 11)$ ...(ii)

Dari (i) dan (ii), kita peroleh:

$2^{73} + 14^3 \equiv 8 + 5 \equiv 13 \equiv 2\ (mod\ 11)$

Jadi, sisanya adalah 2.

Contoh 5:

Tentukan sisa pembagian jika 3^{2003}dibagi oleh 26.

Pembahasan:

$3^{2003} = \left(3^3\right)^{667}.3^2 = 27^{667}.9 = (1.26+1)^{667}.9 \equiv 1^{667}.9 \pmod{26} \equiv 9 \pmod{26}$

Jadi, sisanya adalah 9.

Contoh 6:

Tentukan sisa pembagian jika 1978^{20}dibagi oleh 125.

Pembahasan:

$$\begin{aligned}1978^{20} = (16.125-22)^{20} &\equiv (-22)^{20} \pmod{125} \equiv 484^{10} \pmod{125}\\ &\equiv (4.125-16)^{10} \pmod{125}\\ &\equiv (-16)^{10} \pmod{125}\\ &\equiv 256^5 \pmod{125} \equiv (2.125+6)^5 \pmod{125} \equiv 6^5 \pmod{125}\\ &\equiv 2^5\ 3^5 \pmod{125} \equiv 32\,(-7) \pmod{125}\\ &\equiv 26 \pmod{125}\end{aligned}$$

Jadi, sisanya adalah 26.

Contoh 7:

Tentukan sisa jika 6^{1987} dibagi oleh 37.

Pembahasan:

$6^2 \equiv -1 \pmod{37}$.

$6^{1987} \equiv 6.\,6^{1986} \equiv 6\left(6^2\right)^{993} \equiv 6(-1)^{993} \equiv -6 \equiv 31 \pmod{37}$.

Jadi, sisanya adalah 31.

Contoh 8:

Tentukan angka satuan dari 7^{7^7}.
Pembahasan:

Untuk mencari angka satuan dari 7^{7^7}, kita harus mencari $7^{7^7} \pmod{10}$. Perhatikan bahwa $7^2 \equiv -1 \pmod{10}$; $7^3 \equiv 7^2.7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}$; dan $7^4 \equiv (7^2)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Dan juga $7^2 \equiv 1 \pmod 4$; $7^7 \equiv (7^2)^3.7 \equiv 3 \pmod 4$, ini berarti ada suatu bilangan bulat t sedemikian sehingga $7^7 = 4t + 3$. Sekarang, perhatikan bahwa:

$$7^{7^7} \equiv 7^{4t+3} \equiv (7^4)^t \, 7^3 \equiv 1^t.3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Jadi, angka satuannya adalah 3.

Contoh 9:
(CHINA/2004) Jika bilangan tiga digit dibagi oleh 2, 3, 4, 5 dan 7, bersisa 1. Tentukan nilai minimal dan maksimal bilangan tiga digit tersebut.
Pembahasan:
Misalkan x adalah bilangan 3 digit dengan sisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, dan 7. Maka $x-1$ habis dibagi oleh 2, 3, 4, 5, dan 7. Sehingga,

$$x - 1 = k.[2, 3, 4, 5, 7] = 420k,$$ untuk suatu k bilangan asli.

Jadi, nilai minimal x adalah 420+1=421, dan nilai maksimal untuk x adalah 420.2+1=841.

Contoh 10:
Diketahui bahwa 2726, 4472, 5054, 6412 mempunyai sisa yang sama jika masing-masing bilangan tersebut dibagi oleh suatu bilangan asli dua digit m. Tentukan nilai dari m.
Pembahasan:
Karena tidak memberi pengaruh terhadap sisa yang tidak diketahui, maka tiga selisih yang disusun dari empat bilangan dapat digunakan untuk mengganti empat bilangan yang sebenarnya pada soal. Maka,

$$m \mid (4472-2726) \Rightarrow m \mid 1746. \qquad 1746 = 2.3^2.97$$

$$m \mid (5054-4472) \Rightarrow m \mid 582. \qquad 582 = 2.3.97$$

$$m \mid (6412-5054) \Rightarrow m \mid 1358. \qquad 1358 = 2.7.97$$

Karena 97 merupakan pembagi sekutu tunggal dari selisih-selisih yang disusun dari empat bilangan pada soal, Jadi m=97.

LATIHAN 6A

1. (OSK, Tipe 3/2012) Tentukan angka satuan dari $(2012)^{2012}$.
2. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1991) Tentukan angka satuan dari 1997^{1991}
3. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1990) Tentukan sisa jika 3^{1990} dibagi oleh 41
4. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Tentukan angka satuan dari bilangan $n = 1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 1989!$
5. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Berapakah sisa jika $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots. + 1990^3$

oleh 7.

6. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1989) Misalkan $a_n = 6^n + 8^n$, tentukan sisa pembagian a_{1989}oleh 49.
7. (Seleksi Awal IMO Hongkong/1998) Tentukan bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $1997^n - 1$ habis dibagi oleh 2^{1998}.
8. (OSK 2009) Jika $10^{999999999}$ dibagi 7, maka sisanya adalah ...
9. (OSK 2005) Mana di antara 5 ekspresi berikut yang angka terakhirnya berurut-turut bukan 5, 6, 8, 9, atau 0?

   i) $5^{5^{5^5}}$ ii) $6^{6^{6^6}}$ iii) $8^{8^{8^8}}$ iv) $9^{9^{9^9}}$ v) $10^{10^{10^{10}}}$
10. (OSP 2002) Berapa sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100?
11. (CHINA/2000) Tentukan sisa, jika 3^{2000} dibagi oleh 13.
12. (SSSMO/J/2001) Tentukan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $2^{69} + k$ habis dibagi 127.
13. (SSSMO/2003) Berapakah sisa pembagian jika bilangan $6^{273} + 8^{273}$ dibagi oleh 49.
14. Tentukan sisa, jika bilangan $2005^{2007^{2009}}$ dibagi oleh 7.
15. (SSSMO/1997) Tentukan bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $1000 \leq n \leq 1100$ dan $1111^n + 1222^n + 1333^n + 1444^n$ habis dibagi 10.
16. Tentukan dua digits terakhir bilangan 2^{999}.
17. (CHINA/2001) Tentukan banyaknya bilangan bulat positif n, sedemikian sehingga jika 2007 dibagi n yang bersisa 7.
18. (SSSMO/1999) Berapakah sisa dari 123456789^4 jika dibagi oleh 8.
19. (OSK, Tipe 3/2011) Jika $n = 2011^2 + 2^{2011}$ maka digit satuan dari n^2 adalah ...
20. Buktikan bahwa $7 \mid \left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right)$
21. Tentukan sisa dari $47^{37^{27}}$ ketika bilangan tersebut dibagi 11.
22. (CHINA/1990) Berapakah sisa jika 9^{1990} dibagi oleh 11?
23. (SSSMO/2000) Tentukan angka satuan dari $3^{1999}.7^{2000}.17^{2001}$.
24. Tentukan dua digit terakhir dari $14^{14^{14}}$.

Fungsi Euler

Definisi

Untuk setiap bilangan bulat positif n, kita definisikan

$\varphi(n)$ = banyaknya bilangan bulat positif yang tidak lebih dari n dan relatif prima terhadap n.

Dari definisi di atas, jelas bahwa $\varphi(1) = 1$ dan untuk sebarang bilangan prima p, maka $\varphi(p) = p - 1$.

Lebih lanjut, jika n bilangan bulat positif sedemikian sehingga $\varphi(n) = n - 1$, maka n bilangan prima.

Contoh 11:

$\varphi(12) = 4$ karena 1,5,7,11 relatif prima terhadap 12

$\varphi(16) = 8$ karena 1,3,5,7,9,11,13,15 relatif prima terhadap 16.

Teorema 3
Misal a, b bilangan asli saling relatif prima, p suatu bilangan prima dan m bilangan bulat positif. Maka:
- ✓ $\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$
- ✓ $\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}$

Contoh 12:
- ✓ $\phi(3) = 2, \phi(4) = 2 \Rightarrow \phi(12) = 4$
- ✓ $\phi(16) = \phi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8$
- ✓ $\phi(360) = \phi(2^3 . 3^2 .5) = \phi(2^3)\phi(3^2)\phi(5) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3)(5^1 - 5^0) = 96.$

Teorema 4 (*Euler's Theorem*)
Misal a dan n bilangan asli relatif prima. Maka $a^{\phi(n)} \equiv 1(\text{mod}\, n)$.

Contoh 13:
Karena $(3,100) = 1, \phi(100) = \phi(2^2)\phi(5^2) = (2^2 - 2^1)(5^2 - 5^1) = 40.$
Jadi, $3^{40} \equiv 1(\text{mod}\,100)$

Jika p adalah prima, maka $\phi(p) = p - 1$, kasus khusus untuk teorema 4 adalah teorema berikut:
Teorema 5 (*Fermat Little Theorem*)
Misal p bilangan prima dan $(a, p) = 1$. Maka $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\, p)$

Bentuk $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod}\, p)$ ekuivalen dengan $a^p \equiv a\,(\text{mod}\, p)$.

Contoh 14-a:
Karena 2003 bilangan prima dan $(1234, 2003) = 1$, maka $1234^{2002} \equiv 1(\text{mod}\,2003)$

Contoh 14-b:
Jika p bilangan prima dan $(a, p) = 1$, buktikan bahwa $a^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1\ (mod\ p^n)$.
Pembahasan:
Dengan menggunakan teorema fermat kita mempunyai, $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$ .... (*)

Sebelum kita melanjutkan pembahasan ini, kita akan membuktikan satu teorema yang akan dipakai pada pembahasan ini.

Jika $m = 1\ (mod\ p^n)$, maka $m^p \equiv 1\ (mod\ p^{n+1})$, dimana n > 0 dan p prima.
Bukti:
Dari $m \equiv 1\ (mod\ p^n)$, maka $m = 1 + \alpha\, p^n$, untuk suatu α bilangan bulat.
Perhatikan bahwa $np \geq n + 1$.
Jelas bahwa, $m^p \equiv (1 + \alpha p^n)^p = \cdots . = \cdots . = 1 + \beta p^{n+1}$
$\therefore\ m^p \equiv 1(mod\ p^{n+1})$.

Dengan menggunakan teorema di atas,
$m^p \equiv 1\ (mod\ p^{n+1})$............(**)
Dari (*) dan (**) , maka kita peroleh:

$a^{p(p-1)} \equiv 1 \ (mod\ p^2)$
$a^{p^2(p-1)} \equiv 1 \ (mod\ p^3)$
.
.
.
$a^{p^{n-1}(p-1)} \equiv 1 \ (mod\ p^n)$

Contoh 14-c:
Tunjukkan bahwa $n^7 - n$ habis dibagi oleh 42.
Pembahasan:
$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^{7-1} - 1)$ dan 7 prima.
Dengan menggunakan teorema fermat, kita peroleh:
$n^7 - n \equiv n(n^{7-1} - 1) \equiv n.0 \equiv 0 \ (mod\ 7)$.

Sekarang perhatikan bahwa:
$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n+1)(n-1)(n^4 + n^2 + 1)$.
Kita tahu bahwa $n(n+1)(n-1)$ merupakan 3 bilangan bulat berurutan, maka bilangan ini pasti habis dibagi 3! = 6. Sehingga $n^7 - n$ habis dibagi 6.

Karena (7,6) =1, maka $n^7 - n$ habis dibagi oleh =(6.7) = 42.

Teorema 6 (*Wilson's Theorem*)
Jika p adalah bilangan prima, maka $(p-1)!+1 \equiv 0 \ (\text{mod}\ p)$, yakni $(p-1)!+1$ kelipatan dari p.

Contoh 15:
Perlihatkan bahwa $12! \equiv -1 (\text{mod} 13)$.
Pembahasan:
Karena 13 bilangan prima, berdasarkan Teorema Wilson kita peroleh:
$12!+1 \equiv 0 \ (\text{mod} 13) \Leftrightarrow 12! \equiv -1 (\text{mod} 13)$ (terbukti).

Teorema Sisa China
Jika $b_1, b_2, ..., b_k$ bilangan bulat dan $m_1, m_2, ..., m_k$ pasangan bilangan relatif prima,

maka sistem $\begin{cases} x \equiv b_1 \ (\text{mod}\ m_1) \\ x \equiv b_2 \ (\text{mod}\ m_2) \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ x \equiv b_k \ (\text{mod}\ m_k) \end{cases}$ mempunyai solusi tunggal modulo $m_1 m_2 ... m_k$.

Ingat bahwa b dikatakan ***invers*** dari a modulo n jika $ab \equiv 1 (\text{mod}\ n)$. Sekarang, $(m_j, M_j) = 1$, untuk semua j=1,2,3 ..., k, dimana $M_j = \dfrac{m_1 m_2 ... m_k}{m_j}$. Karenanya M_j mempunyai inverse modulo m_j, yang dinotasikan dengan $\overline{M_j}$. Maka solusi untuk sistem persamaan pada teorema di atas, yakni:

$$x = b_1 M_1 \overline{M_1} + b_2 M_2 \overline{M_2} + ... + b_k M_k \overline{M_k}.$$

Contoh 16:
Tentukan semua bilangan bulat x sedemekian sehingga $x \equiv 2 \pmod{3}$, $x \equiv 3 \pmod{5}$, $x \equiv 4 \pmod{7}$.

Pembahasan:
Karena 3, 5, 7 pasangan bilangan yang relatif prima, Berdasarkan teorem sisa china maka ada solusi tunggal modulo (3.5.7=105)
Sekarang $m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 7,\ M_1 = 35, M_2 = 21, M_3 = 15,\ \overline{M_1} = 2,\ \overline{M_2} = 1,\ \overline{M_3} = 1,$
jadi salah satu solusi untuk x adalah $x = 2.35.2 + 3.21.1 + 4.15.1 = 263.$
Perhatikan bahwa $263 \equiv 53 \pmod{105}$, Sehingga solusi umumnya adalah $x = 53 + 105t$ untuk sebarang bilangan bulat t.

LATIHAN 6B

1. Tentukan digit teakhir dari 3^{400}.
2. Tunjukkan bahwa $5^{10} - 3^{10}$ habis dibagi 11.
3. Tentukan dua digit terakhir dari bilangan 17^{2002}
4. Tentukan sisa pembagian jika 5^{2007} dibagi 41.
5. Tentukan sisa jika 3^{1999} dibagi oleh 47.
6. Tentukan sisa jika 2^{1990} dibagi oleh 1990.
7. Tentukan dua angka terakhir dari 3^{1999}?
8. Buktikan bahwa pangkat 8 dari sebarang bilangan bulat selalu berbentuk $17m$ *atau* $17m \pm 1$ untuk suatu m bilangan bulat.
9. Misalkan $a_1 = 4, a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1.$ Tentukan sisa jika a_{100} dibagi 7.
10. Tentukan dua digit terakhir dari bilangan 3^{1000}.
11. Tentukan dua digit terakhir dari bilangan $7^{7^{1000}}$.
12. Tentukan dua digit terakhir dari a_{1001} jika $a_1 = 7, a_n = 7^{a_{n-1}}$.
13. Selesaikan sistem $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$.
14. (IMO ke-6)
    a. Tentukan semua bilangan bulat positif n sedemikian sehingga 7 membagi $2^n - 1$
    b. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan bulat n, bilangan $2^n + 1$ tidak dapat dibagi 7.
15. Jika p bilangan prima ganjil, maka sisa ketika $(p-1)!$ Dibagi oleh $p(p-1)$ adalah p-1.
16. Jika p adalah bilangan prima ganjil, maka untuk sebarang bilangan bulat positif, $n < p,\ (n-1)!\,(p-n)! \equiv (-1)^n \ (mod\ p)$.
17. Misalkan p bilangan prima ganjil. Buktikan bahwa $1^2.3^3 \ldots..(p-2)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \ (mod\ p)$
    dan
    $2^2.4^2 \ldots (p-1)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \ (mod\ p)$.

7. Persamaan Bilangan Bulat

a. Persamaan Diophantine Linear

Definisi

Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan bulat. Persamaan Diophantine berbentuk $ax+by=c$ disebut Persamaan Diophantine Linear dan setiap pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi $ax+by=c$ disebut solusi.

Teorema 1

Persamaan Diophantine $ax+by=c$ mempunyai solusi jika $FPB(a,b)\mid c$.

Teorema 2

Jika FPB(a, b)=1, maka Persamaan Diophantine $ax+by=c$ selalu mempunyai sedikitnya satu solusi bilangan bulat.

Teorema 3

Jika x_0, y_0 solusi bilangan bulat khusus dari Persamaan Diophantine $ax+by=c$, maka solusi bilangan bulat umum persamaan ini adalah

$$\begin{cases} x = x_o + \dfrac{b}{FPB(a,b)}t \\ y = y_o - \dfrac{a}{FPB(a,b)}t \end{cases}$$ untuk sebarang bilangan bulat t.

Contoh 1:

Hitung banyak bilangan bulat $1 \le n \le 100$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk $6x+8y$ untuk suatu bilangan bulat x dan y.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa FPB(6, 8)=2. Oleh karena itu menurut teorema 1 di atas, hanya bilangan yang terbagi 2 yang dapat dinyatakan dalam bentuk 6x+8y untuk suatu bilangan bulat x dan y. Dalam hal ini, $1 \le n \le 100$ yang terbagi 2 ada 50 bilangan.

Contoh 2:

Tentukan solusi umum dari persamaan diophantine $21x+14y=70$.

Pembahasan:

Karena $FPB(21,14)=7$ dan $7 \mid 70$ maka persamaan tersebut mempunyai tak hingga banyak solusi bilangan bulat.

Perhatikan, untuk menemukan solusi umumnya kita menggunakan algoritma euclid: $1.21+(-1).14=7$, sehingga $10.21+(-10).14=70$. Jadi, $x_o=10$ & $y_o=-10$ adalah solusi khusus, sehingga solusi umum dari persamaan diophantine, berbentuk $x=10+2n$, $y=-10-3n$ dimana n suatu bilangan bulat.

Contoh 3:

Tentukan x dan y bulat positif yang memenuhi $7x+5y=100$.

Pembahasan:

FPB(7,5)=1, menurut teorema 2 di atas, maka persamaan ini mempunyai sedikitnya satu solusi. Dengan mudah bisa kita tulis

$1=3.7-4.5$

$100=300.7-400.5$. Maka $x_o=300$, $y_o=-400$.

Solusi umumnya adalah

$x=300+5n \qquad y=-400-7n$.

Karena yang diminta x,y bulat positif, maka haruslah
$300+5n>0$ & $-400-7n>0$ yaitu $-60<n<-57\frac{1}{7}$.
Jadi, persamaan diophantine $7x+5y=100$ mempunyai tepat dua solusi bulat positif yaitu :
$\begin{cases} n=-59 \Rightarrow x=5, y=13 \\ n=-58 \Rightarrow x=10, y=6 \end{cases}$.

LATIHAN 7A

1. Untuk masing-masing persamaan diophantine linear, tentukan semua solusi bulat atau tunjukkan jika tidak ada solusi bulat.
   a. $2x+5y=11$
   b. $17x+13y=100$
   c. $21x+14y=147$
   d. $60x+18y=97$
2. (CHINA/2001) Tentukan semua solusi bulat positif untuk persamaan $12x+5y=125$.
3. Diketahui bahwa bilangan bulat positif x>1 dan y memenuhi persamaan $2007x-21y=1923$. Tentukan nilai minimum dari 2x+3y?
4. (CHINA/2007) Diketahui persamaan $\frac{4}{3}x-a=\frac{2}{5}x+140$ mempunyai solusi bulat positif, dimana a suatu parameter. Tentukan nilai minimum bilangan bulat positif dari a.
5. (AHSME/1989) Diketahui n bilangan bulat positif, dan persamaan $2x+2y+z=n$ mempunyai 28 solusi bulat positif untuk (x,y,z). Maka nilai n adalah ...
6. Tentukan solusi bulat dari persamaan diophantine $13x-7y=0$ yang memenuhi kondisi $80<x+y<120$.
7. Berapa banyak cara berbeda perangko seharga 81 cents dapat diganti dengan menggunakan perangko seharga 4 cents dan 7 cents saja?
8. Berapa banyak solusi bulat dari persamaan $-20x+16y=12$, $|x|<10$, $|y|<10$?
9. (AHSME/1992) Jika k bilangan bulat positif sedemikian sehingga persamaan dalam variabel x; $kx-12=3k$ mempunyai akar-akar bulat, maka banyaknya nilai k yang mungkin adalah ...
10. (SSSMO/J/2002) Dua bilangan bulat positif A dan B memenuhi $\frac{A}{11}+\frac{B}{3}=\frac{17}{33}$. Tentukan nilai dari A^2+B^2.
11. (CHINA/1997) Diketahui m,n bilangan bulat yang memenuhi $3m+2=5n+3$ dan $30<3m+2<40$, tentukan nilai dari mn.
12. Diketahui bilangan 4 digit dan jumlah semua digit-digitnya 2006, tentukan bilangan 4 digit tersebut.
13. (SSSMO/J/1997) Andaikan x, y, dan z adalah bilangan bulat positif sedemikian sehingga $x>y>z>663$ dan x, y, dan z memenuhi $\begin{cases} x+y+z=1998 \\ 2x+3y+4z=5992 \end{cases}$. Teentukan nilai dari x, y, dan z.
14. (OSK 2010) Pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi $2x+5y=2010$

sebanyak ....

15. (OSK 2006) Banyaknya solusi pasangan bilangan bulat positif persamaan $3x+5y=501$adalah ...

b. Persamaan Diophantine non-Linear

Persamaan jenis ini sangat banyak bentuknya, kita tidak mungkin mengkarakteristik satu per satu. Berikut akan dibahas melalui beberapa contoh soal dan metode penyelesaiannya.

Contoh 4:

Berapa banyak pasangan terurut bilangan bulat (x,y) yang memenuhi kondisi

$$\begin{cases} 0<x<y \\ \sqrt{1998}=\sqrt{x}+\sqrt{y} \end{cases}$$

Pembahasan:

Karena $\sqrt{y}=\sqrt{1998}-\sqrt{x}$, kuadratkan kedua ruas, kita peroleh $y=1998+x-6\sqrt{2.3.37x}$. Karena y bilangan bulat, maka haruslah x berbentuk: $x=(2.3.37)k^2$. Jelas bahwa nilai k yang memenuhi adalah k=1, sehingga kita peroleh x=222 dan y=888. Jadi, banyak pasangan terurut (x,y) adalah 1.

Contoh 5:

Berapa banyak pasangan bilangan asli (x,y) sedemikian sehingga $x^2-y^2=64$?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa $(x-y)(x+y)=64$. Karena x dan y bilangan asli, dan x>y (dari persamaan di soal), serta (x-y), (x+y) keduanya juga bilangan asli, dengan $x-y<x+y$. Dengan mendaftar faktorisasi dari 64: $64=1.64=2.32=4.16=8.8$.

Untuk menentukan nilai x dan y, perhatikan tabel berikut;

x – y	x + y	x	y	Ket
1	64	65/2	63/2	TM
2	32	17	15	M
4	16	10	6	M
8	8	8	0	TM

Jadi, Ada 2 pasangan bilangan asli yang memenuhi kondisi pada soal, yaitu (17,15) dan (10,6).

Contoh 6:

Jika x dan y bilangan asli sedemikian sehingga $x+y+xy=9$, berapa kemungkinan nilai terbesar untuk xy?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$$x+y+xy=9$$
$$x+1+y+xy=10$$
$$(x+1)(y+1)=10$$

Perhatikan bahwa (x+1) dan (y+1) keduanya bilangan asli. Kita mendaftar faktorisasi dari 10 sebagai perkalian dua bilangan asli. Kita dapat memilih x>y. Jadi, $(x+1)(y+1)=10=10.1=5.2$. Sekarang $x+1=10, y+1=1$ maka $x=9,\ y=0\notin \mathbb{N}$, (9,0) bukan pasangan solusi untuk soal ini. Kemudian untuk x+1=5, y+1=2 maka x=4, y=1. Nilai terbesar untuk xy=4.1=4.

LATIHAN 7B

1. Berapa banyak pasangan bilangan asli (x,y) yang memenuhi persamaan $x+y=xy$?
2. Berapa banyak pasangan (x,y) yang memenuhi persamaan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}, x,y \in \mathrm{N}$?
3. Tentukan banyaknya solusi bulat (x,y,z) dengan $x \neq y \neq z$, dari persamaan $|x|\,|y|\,|z|=12$.
4. Andaikan a, b, dan c bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga $abc+ab+ac+bc+a+b+c=1000$. Tentukan nilai dari $a+b+c$.
5. Banyaknya pasangan tripel (a,b,c) sedemikian sehingga $a+2b=c$ & $a^2+b^2=c^2$ serta $a,b,c \in \mathrm{N}$ adalah ...
6. Berapa banyaknya pasangan terurut (a,n) dimana $a,n \in \mathrm{N}$ yang memenuhi persamaan $n!+10=a^2$?
7. (SSSMO/J/2008) Misalkan n bilangan bulat positif sedemikian sehingga $n^2+19n+48$ merupakan bilangan kuadrat sempurna. Tentukan nilai dari n.
8. (CHINA/2003) Tentukan solusi bulat dari persamaan $6xy+4x-9y-7=0$.
9. (SSMO/J/2004) Tentukan banyaknya pasangan terurut dari bilangan positif (x,y) yang memenuhi persamaan $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2004}$.
10. (SSMO/J/2009) Tentukan nilai terkecil dari bilangan bulat positif m sedemikian sehingga persamaan $x^2+2(m+5)\,x+(100m+9)=0$ hanya mempunyai solusi bulat.
11. (CHNMOL/2005) p, q adalah dua bilangan positif, dan dua akar-akar dari persamaan dalam variabel x, $x^2-\frac{p^2+11}{9}x+\frac{15}{4}(p+q)+16=0$ adalah p dan q juga. Tentukan nilai p dan q.
12. (CHNMOL/2003) Diketahui bilangan bulat a, b yang memenuhi persamaan $\left[\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right]\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3}$, tentukan nilai dari a+b.
13. (CHNMOL/1995) Banyaknya solusi bulat positif (x,y,z) yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} xy+yz=63 \\ xz+yz=23 \end{cases}$.
14. (CHINA/2003) Diketahui $\frac{1260}{a^2+a-6}$ adalah bilangan bulat positif, dimana a suatu bilangan bulat positif. Tentukan nilai a.
15. (SSSMO/J/2004) Misalkan x, y, z, dan w menyatakan empat bilangan bulat positif berbeda sedemikian sehingga $x^2-y^2=z^2-w^2=81$. Tentukan nilai dari $xz+yw+xw+yz$.
16. (CHINA/2003) Tentukan banyaknya solusi bulat tidak nol (x,y) yang

memenuhi persamaan $\frac{15}{x^2y}+\frac{3}{xy}-\frac{2}{x}=2.$

17. (CHINA/2001) Tentukan banyaknya solusi bulat positif untuk persamaan $\frac{x}{3}+\frac{14}{y}=3.$
18. (CHINA/2001) Tentukan banyaknya solusi bulat positif dari persamaan $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{1}{4}.$
19. (SSSMO/2005) Berapa banyak pasangan terurut bilangan bulat (x,y) yang memenuhi persamaan $x^2+y^2=2(x+y)+xy$?
20. (SSSMO/2003) Misal p bilangan prima sedemikian sehingga $x^2-px-580p=0$ mempunyai dua solusi bulat. Tentukan nilai dari p.
21. (OSK, Tipe 1&3/2011) Bilangan bulat positif terkecil a sehingga 2a + 4a + 6a + ... + 200a merupakan kuadrat sempurna adalah ....
22. (OSK, Tipe 3/2011/OSP 2008/Seleksi Awal IMO Hongkong/1999) Tentukan nilai dari $3x^2y^2$ jika x dan y adalah bilangan bulat yang memenuhi persamaan $y^2+3x^2y^2=30x^2+517.$
23. (OSK 2010) Diketahui bahwa ada tepat 1 bilangan asli n sehingga $n^2+n+2010$ merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah ...
24. (OSK 2010) Diketahui p adalah bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan bulat positif (x,y) yang memenuhi $x^2+xy=2y^2+30p.$ Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x,y) yang memenuhi ada sebanyak ...
25. (OSP 2010) Banyak bilangan bulat positif n<100, sehingga persamaan $\frac{3xy-1}{x+y}=n$ mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x,y) adalah ...
26. (OSP 2009) Diketahui k, m, dan n adalah tiga bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{k}{m}+\frac{m}{4n}=\frac{1}{6}$. Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah ...
27. (OSK 2007) Semua pasangan bilangan bulat(x,y) yang memenuhi $x+y=xy-1$ dan $x\le y$ adalah...
28. (OSP 2007) Di antara semua solusi bilangan asli (x,y) persamaan $\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}=54,$ solusi dengan x terbesar adalah (x,y)=...
29. (OSK 2005) Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m,n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1.$
30. (OSP 2005) Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan 2xy − 5x + y = 55 adalah · · · · ·
31. (OSP 2005) Barisan bilangan asli (a, b, c) dengan a ≥ b ≥ c, yang memenuhi sekaligus kedua persamaan ab + bc = 44 dan ac + bc = 23 adalah · · · · ·
32. (OSK 2004) Jika x dan y dua bilangan asli dan x + y + xy = 34, maka nilai x + y = · · · · ·
33. (OSK 2002) Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a,b) yang memenuhi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6}$?
34. (OSK, Tipe 1, 2 &3/2012) Banyaknya pasangan bilangan asli berbeda yang selisih kuadratnya 2012 adalah ....

35. (OSK, Tipe 2/2012) Pasangan bilangan asli (a,b) yang memenuhi $4a(a+1) = b(b+3)$ sebanyak ...
36. (OSK, Tipe 3/2012) Banyaknya pasangan solusi bilangan bulat positif yang memenuhi $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$ adalah ...
37. (OSK, Tipe 1/2012) Banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi $(n-1)(n-3)(n-5)\ldots(n-2013) = n(n+2)(n+4)\ldots(n+2012)$ adalah ...
38. (OSP 2012) Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy^2} = \frac{3}{4}$ adalah ...
39. (OSP 2012) Jika m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi $m^2 + n^5 = 252$, maka m + n = ...

8. Fungsi Tangga

Fungsi tangga yang kita bahas, dalam buku ini ada 2 jenis. Jenis-jenis tersebut yang sering digunakan dalam menyelesaikan soal-soal olimpiade atau sejenisnya. Fungsi tersebut adalah Fungsi floor (pembulatan ke bawah) dan ceiling (pembulatan ke atas).

Definisi 1

Misalkan x adalah sebarang bilangan real. Nilai fungsi floor x dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

Definisi 2

Untuk sebarang bilangan real x, Nilai $x - \lfloor x \rfloor$, dinotasikan dengan $\{x\}$ dan disebut dengan bagian decimal dari x.

Definisi 3

Misalkan x adalah sebarang bilangan real. Nilai fungsi ceiling x dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$ merupakan bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x.

Contoh 1:

$\lfloor 2,1 \rfloor = 2$, $\{2,1\} = 0,1$, $\lceil 2,1 \rceil = 3$. Sedangkan $\lfloor -3,9 \rfloor = -4$, $\{-3,9\} = 0,1$, $\lceil -3,9 \rceil = -3$.

Berikut ini sifat-sifat yang berkaitan dengan fungsi tangga:

1). Jika a dan b bilangan bulat, b > 0, dan q hasil bagi jika a dibagi oleh b, maka $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$.

2). Untuk sebarang bilangan real x dan sebarang bilangan bulat n, $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ dan $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

3). Untuk sebarang bilangan real positif x dan sebarang bilangan bulat positif n, banyaknya kelipatan positif dari n yang tidak lebih dari x adalah $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

4). Untuk sebarang bilangan real x dan sebarang bilangan bulat positif n, $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

5). $0 \le \{x\} < 1$, dan $\{x\} = 0$ jika dan hanya jika x bilangan bulat.

6). Untuk sebarang bilangan real x, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

7). Untuk sebarang bilangan real x, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1$ atau $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x < \lceil x \rceil$.

8). $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & jika\, x\ bukan bilangan bulat \\ -\lfloor x \rfloor & jika\, x\ bilangan bulat \end{cases}$

9). Untuk sebarang bilangan real x dan y, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x+y \rfloor$.

10). Untuk sebarang bilangan real $x, y \ge 0$, $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \le \lfloor xy \rfloor$.

Contoh 2:

Tentukan semua bilangan bulat positif n sehingga $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor$ membagi 111.

Pembahasan:

Pembagi positif dari 111 adalah 1, 3, 37, 111. Sehingga kita bagi kasus-kasus seperti berikut:

- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 1 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt[n]{111} < 2 \Leftrightarrow 1 \le 111 < 2^n$, jadi $n \ge 7$.
- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 3 \Leftrightarrow 3 \le \sqrt[n]{111} < 4 \Leftrightarrow 3^n \le 111 < 4^n$, jadi n=4.
- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 37 \Leftrightarrow 37 \le \sqrt[n]{111} < 38 \Leftrightarrow 37^n \le 111 < 38^n$, jadi tidak nilai n yang memenuhi.
- ✓ $\lfloor \sqrt[n]{111} \rfloor = 111 \Leftrightarrow 111 \le \sqrt[n]{111} < 112 \Leftrightarrow 111^n \le 111 < 112^n$, jadi n=1.

Jadi, nilai $n = 1, 4\ atau\ n \ge 7$.

Contoh 3:

(OSN 2003) Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa jika x^2 bilangan bulat, maka $\lfloor x^2 \rfloor = \lceil x^2 \rceil$ ini berakibat bahwa $x^2 = \frac{2003}{2}$ (bukan bulat), kontradiksi. Jadi, jelas bahwa x^2 bukan bilangan bulat. Ini berakibat $\lceil x^2 \rceil = \lfloor x^2 \rfloor + 1$, sehingga $2\lfloor x^2 \rfloor + 1 = 2003 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1001$. Dari sini dapat kita simpulkan bahwa $1001 \le x^2 < 1002$, sehingga kita peroleh solusi berbentuk:
$\sqrt{1001} \le x < \sqrt{1002}$ atau $-\sqrt{1002} < x \le -\sqrt{1001}$

Contoh 4:

Selesaikan persamaan $2\lfloor x \rfloor = x + 2\{x\}$.

Pembahasan:

Jelas, bahwa untuk sebarang bilangan real x, $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, sehingga kita peroleh:

$$2\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 3\{x\} \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3\{x\} < 3.$$

Jika $\lfloor x \rfloor = 0, 1, 2$, maka nilai $\{x\}$ berturut-turut adalah 0, 1/3, 2/3. Jadi, solusinya adalah $x = 0, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}$.

Contoh 5:

(SSSMO/2002) Tentukan banyaknya solusi real dari $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor = x$.

Pembahasan:

Dari soal di atas, maka x haruslah bilangan bulat. Misalkan $x = 6q + r$, dimana r = 0, 1, 2, 3, 4, atau 5 dan q bilangan bulat. Maka kita peroleh persamaan:

$$q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2r}{3} \right\rfloor = r.$$

- ✓ $r = 0 \Rightarrow q = 0$, x = 0 (Memenuhi)

- ✓ $r=1 \Rightarrow q=1, x=7$ (Memenuhi)
- ✓ $r=2 \Rightarrow q=0, x=2$ (Memenuhi)
- ✓ $r=3 \Rightarrow q=0, x=3$ (Memenuhi)
- ✓ $r=4 \Rightarrow q=0, x=4$ (Memenuhi)
- ✓ $r=5 \Rightarrow q=0, x=5$ (Memenuhi)

Jadi, ada 6 solusi yang memenuhi persamaan.

Banyaknya angka nol di bagian kanan tanpa terputus pada n!

Untuk mencari banyaknya angka nol pada bagian kanan n!, kita dapat menggunakan rumus berikut:

$$q = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots$$

Kita dapat membuat rumus umum bahwa, Pangkat tertinggi dari p dalan n! $(p \le n)$ adalah $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \ldots$

Contoh 6:

Tentukan banyak angka nol di sebelah kanan tanpa putus dari bilangan 31!

Pembahasan:

Kita terapkan rumus di atas, Banyak angka nol di bagian kanan tanpa putus dari 31! adalah $\left\lfloor \frac{31}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31}{5^2} \right\rfloor = 6 + 1 = 7.$

LATIHAN 8

1. (OSK, 2013) Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x dan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Tentukan semua x yang memenuhi $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.
2. (OSK, Tipe 2/2012) Banyaknya angka 0 sebagai angka-angka terakhir dari 2012! Adalah ...
3. (OSK, Tipe 3/2012) Tentukan bilangan n terbesar sehingga 6^n membagi 30!
4. (OSK, Tipe 1/2012) Jika $\left(\sqrt{2012} + \sqrt{2011}\right)^2 = n + r$ dengan n meruapakn bilangan asli dan $0 \le r < 1$, maka nilai r = ...
5. (OSK 2003) Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh, $\lfloor 4{,}9 \rfloor = 4$ & $\lfloor 7 \rfloor = 7$. Jika x dn y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 9$ & $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah ?
6. (OSP 2005) Untuk sembarang bilangan real a, notasi $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan a. Jika x bilangan real yang memenuhi $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari ....
7. (OSN 2005) Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan $m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$.
8. (OSK 2007) Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari

atau sama dengan bilangan real x, $\lfloor \sqrt{3}-\sqrt{5} \rfloor^2 = \ldots$

9. (OSP 2009) Misalkan $q=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Nilai $\lfloor q\lfloor qn \rfloor\rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in \mathbb{N}$ adalah ...
10. (OSP 2010) Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Bilangan asli n sehingga persamaan $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + \dfrac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \dfrac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah ....
11. (OSP 2012) Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\{x\}$ sebagai bilangan bulat yang terdekat dengan x, sebagai contoh $\{1{,}9\} = 2$, $\{-0{,}501\} = -1$, dsb. Jika n adalah suatu bilangan bulat positif kelipatan 2012, maka banyaknya bilangan bulat positif k yang memenuhi $\{\sqrt[3]{k}\} = n$ adalah ...
12. (OSP 2012) Diketahui H adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2012 yang faktor primanya tidak lebih dari 3. Selanjutnya didefinisikan himpunan $S = \left\{\frac{1}{n} | n \in H\right\}$. Jika x merupakan hasil penjumlahan dari semua anggota S dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, maka $\lfloor x \rfloor = \cdots$.
13. (CMO/1999) Tentukan semua solusi real dari persamaan $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$.
14. (SSSMO/J/2001) Misal x, y, z bilangan real positif sehingga $\begin{cases} x+\lfloor y \rfloor + \{z\} = 13,2 \\ \lfloor x \rfloor + \{y\} + z = 14,3 \\ \{x\} + y + \lfloor z \rfloor = 15,1 \end{cases}$.
    Tentukan nilai dari x.
15. (CHINA/1988) Misalkan $S = \lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \ldots + \lfloor\sqrt{1988}\rfloor$. Tentukan nilai dari $\lfloor S \rfloor$.
16. (CHINA/1986) Hitunglah jumlah $S = \sum\limits_{k=1}^{502} \left\lfloor \dfrac{305k}{503} \right\rfloor$
17. (PUTNAM/1986) Berapa digit satuan dari $\left\lfloor \dfrac{10^{20\,000}}{10^{100}+3} \right\rfloor$?
18. (KIEV/1972) Selesaikan persamaan $\lfloor x^3 \rfloor + \lfloor x^2 \rfloor + \lfloor x \rfloor = \{x\} - 1$.
19. (CMO/1975) Selesaikan persamaan $\lfloor x \rfloor^2 = \{x\}\, x$.
20. (ASUMO/1987) Tentukan semua solusi untuk persamaan $x^2 - 8\lfloor x \rfloor + 7 = 0$
21. (CHNMOL/1987) Selesaikan persamaan $\lfloor 3x+1 \rfloor = 2x - \dfrac{1}{2}$, dan tentukan jumlah semua akar-akarnya.
22. (OSP 2009) Pada bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak $\cdots\cdots$
23. Berapa banyaknya angka nol di bagian kanan tanpa putus dari bilangan $5^n!$, $n \in \mathbb{N}$?
24. (OSK 2007) Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ...
25. Selesaikan dalam bilangan real persamaan $\lfloor x\lfloor x \rfloor\rfloor = 1$.

26. (Seleksi Awal IMO Hongkong, 2008) Diketahui n! mempunyai tepat 57 angka nol dibagian kanan tanpa putus, tentukan jumlah semua kemungkinan nilai n.

BAB IV
KOMBINATORIKA

1. Prinsip Pencacahan & Binomial Newton

   1.1. Prinsip Pencacahan

Aturan Penjumlahan

Jika suatu pekerjaan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, dan suatu pekerjaan kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara, dan kedua pekerjaan tersebut tidak dapat terjadi dalam waktu yang bersamaan, maka seluruh pekerjaan dapat dilakukan dalam $n_1 + n_2$ cara.

atau jika dikaitkan dengan konsep himpunan, maka:
Misalkan kita mempunyai dua himpunan, misalkan A dan B dimana $A \cap B = \phi$ maka jumlah anggota dari dua himpunan A dan B adalah jumlah dari banyaknya anggota masing-masing himpunan.

Contoh 1:
Dalam suatu kartu bridge lengkap, berapa macam cara untuk mengambil sebuah kartu jantung (heart) atau kartu daun(spade)
Pembahasan:
Dalam kartu bridge, kartu-kartu jantung dan daun merupakan himpunan-himpunan yang saling lepas sehingga banyaknya cara untuk mendapatkan salah satunya adalah jumlah cara yang mendapatkan masing-masing kartu.

Dalam kartu bridge, ada 13 kartu jantung dan 13 kartu daun sehingga banyaknya cara ada 13 + 13 =26 cara.

Contoh 2:
Ada dua cara untuk pergi dari Surabaya ke Bali, yaitu menggunakan pesawat udara atau kapal laut. Untuk pesawat ada 4 penerbangan, dan kapal laut ada 3 kapal. Berapa banyak cara untuk pergi dari Surabaya ke Bali.
Pembahasan:
Karena cara berpergian dari Surabaya ke Bali dengan udara dan laut merupakan dua hal terpisah, maka banyaknya cara tinggal dijumlahkan 4 + 3=7 cara.

Contoh 3:
Suatu sekolah harus mengirimkan seorang wakil untuk mengikuti suatu pertemuan ilmiah yang diambil dari sekelompok guru berjumlah 70 atau kelompok siswa berjumlah 700. Tentukan banyaknya cara memilih satu wakil tersebut.
Pembahasan:
Karena cara memilih satu wakil dari guru dan memilih dari siswa merupakan dua hal yang terpisah, maka banyaknya cara adalah 70 + 700 = 770 cara.

Contoh 4:
Pada suatu rak buku tersedia 5 buku matematika, 10 buku fisika, dan 2 buku kimia. Tentukan banyaknya cara Budi mengambil satu buku dari rak tersebut.
Pembahasan:
Banyaknya caraadalah 5 + 10 + 2 = 17 cara.

Aturan Perkalian

Jika suatu pekerjaan dapat dilakukan dalam dua langkah pekerjaan, yaitu pekerjaan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara dan pekerjaan kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara setelah pekerjaan pertama dilakukan, maka seluruh pekerjaan dapat dilakukan dalam n_1 x n_2 cara.

Contoh 5:

Misalkan kita akan pergi dari kota Jombang ke Surabaya dan harus melalui kota Lamongan. Dari kota Jombang ke Lamongan ada 2 jalan dan dari kota Lamongan ke Surabaya ada 6 jalan. Berapa banyak cara untuk pergi dari kota Jombang ke Surabaya dengan melalui Lamongan?

Pembahasan:

Berdasarkan aturan perkalian di atas, maka banyaknya cara ada 2 x 6=12 cara.

Contoh 6:

Kursi-kursi dalam ruang pertemuan ditandai dengan kode dengann ketentuan kode tersebut berisi dua digit, digit pertama berisi huruf dan digit kedua berisi bilangan asli kurang dari 50. Tentukan banyaknya seluruh kursi yang dapat ditandai.

Pembahasan:

Berdasarkan aturan perkalian di atas, maka banyaknya kursi yang dapat ditandai adalah 26 x 49 = 1274 kursi

LATIHAN 1.1

1.
   a. Tentukan banyaknya fungsi yang dapat dibuat dari A yang mempunyai 2 anggota ke B yang mempunyai 4 anggota.
   b. Tentukan banyaknya fungsi 1- 1 (injektif) dari A yang mempunyai 2 anggota ke B yang mempunyai 3 anggota.

2. Dalam suatu ujian, setiap mahasiswa diminta mengerjakan 1 soal dari 10 soal A atau 15 soal B. Tentukan banyaknya cara mahasiswa tersebut mengerjakan soal tersebut.
3. Seorang akan membuat susunan angka-angka menjadi bilangan bulat positif. Jika bilangan-bilangan itu terdiri dari satu angka, susunan dua angka, atau susunan tiga angka. Untuk susunan dua atau tiga angka tidak ada angka yang berulang dan tidak ada susunan yang dimulai dengan nol. Tentukan banyaknya seluruh susunan yang mungkin disusun orang tersebut.
4. Diketahui angka-angka 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9. Tentukan banyaknya semua bilangan yang dibuat dari angka diketahui dan angka-angkanya tidak boleh berulang?
5. Diketahui bilangan 2592. Tentukan banyaknya pembagi positif dari bilangan ini termasuk 1 dan 2592.
6. Ada berapa banyak bilangan 7 digit dimulai dari 432 dan diakhiri 3 atau 5?
7. Suatu kode rahasia berupa bilangan lima angka. Angka nol mungkin berada di tempat pertama. Berapa banyak kode rahasia yang mungkin jika angka-angkanya menunjukkan barisan naik?
8. (OSK Tipe 2/2012) Misalkan $S = \{1,\ 2, 3, \dots, 10\}$ dan $f: S \to S$ meruapakn korespondensi satu-satu yang memenuhi $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, \& f(5) = 6$. Banyaknya fungsi f yang memenuhi adalah ....

9. (OSP 2012) Lima siswa, A;B;C;D;E berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika A tidak bisa berlari pertama dan D tidak bisa berlari terakhir, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah...
10. (OSP 2011) Banyak bilangan tiga digit yang semua digit-digitnya berbeda dan digit terakhirnya merupakan hasil penjumlahan dari dua digit yang lainnya adalah ...
11. (OSK Tipe 1/2011) Misalkan kita menuliskan semua bilangan bulat 1, 2, 3, ..., 2011. Berapa kali kita menuliskan angka 1?
12. (OSK Tipe 1/2011) Terdapat 5 orang pria dan 5 orang wanita duduk dalam sederetan kursi secara random. Berapa banyaknya cara untuk menduduki kursi tersebut dengan syarat tidak boleh ada yang duduk berdampingan dengan jenis kelamin yang sama ?
13. (OSK Tipe 3/2011) Diketahui sebuah bulan dengan jumlah hari 31 memiliki jumlah hari selasa dan kamis yang sama banyaknya. Maka hari yang mungkin sebagai hari awal pada bulan tersebut adalah · · ·
14. (OSK 2010) Pada sebuah persegi panjang berukuran 25 x 20 akan dibuat bujusangkar sehingga menutupi seluruh bagian persegipanjang tersebut. Berapa banyak bujursangkar yang mungkin dapat dibuat? (*Hint: panjang sisi bujursangkar berupa bilangan asli*)
15. (OSP 2010) Pada suatu lingkaran terdapat 12 titik yang berbeda. Dengan menggunakan 12 titik tersebut akan dibuat 6 tali busur yang tidak berpotongan. Banyaknya cara ada sebanyak · · · · · ·
16. (OSP 2010) Seseorang menulis surat berantai kepada 6 orang. Penerima surat ini diperintahkan untuk mengirim surat kepada 6 orang lainnya. Semua penerima surat membaca isi surat lalu beberapa orang melaksanakan perintah yang tertulis dalam surat, sisanya tidak melanjutkan surat berantai ini. Jika terdapat 366 orang yang tidak melanjutkan surat berantai ini, maka banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai ini adalah · · · · · ·
17. (OSK 2009) Jika tiga pasang suami istri akan menenmpati tujuh kursi yang berjajar ke samping dengan syarat semua suami istri duduk berdekatan dan tidak ada laki-laki dan perempuan bukan suami-istri yang duduk berdekatan, maka banyaknya cara ada ...
18. (OSK 2008) Banyaknya susunan huruf B, I, O, L, A sehingga tidak ada dua huruf hidup (vowel) yang berturutan adalah
19. (OSK 2008) Bilangan 4-angka dibentuk dari 1, 4, 7 dan 8 dimana masing-masing angka digunakan tepat satu kali. Jika semua bilangan 4-angka yang diperoleh dengan cara ini dijumlahkan, maka jumlah ini mempunyai angka satuan · · · · · · ·
20. (OSP 2007) Bilangan ganjil 4-angka terbesar yang hasil penjumlahan semua angkanya bilangan prima adalah · · · · · · · ·
21. (OSP 2006) Bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan jumlah dua bilangan prima lainnya adalah · · · ·
22. (OSK 2005) Seorang siswa mempunyai dua celana berwarna biru dan abu-abu, tiga kemeja berwarna putih, merah muda dan kuning, serta dua pasang sepatu berwarna hitam dan coklat. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah · · · · · ·
23. (OSK 2005) Tentukan semua bilangan tiga-angka sehingga nilai bilangan itu adalah 30 kali jumlah ketiga angka itu.
24. (OSP 2005) Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus

adalah . . . . .

25. (OSP 2005) Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memegang tepat satu rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan seluruh rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah . . . . .

1.2. Faktorial

Kita definisikan simbol ! (faktorial), sebagai berikut:

$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = 1.2.3.4....n, \text{ dimana } n \text{ bilangan asli} \end{cases}$. Perhatikan bahwa simbol n! dibaca "n faktorial"

Contoh 1:

Dari definisi faktorial di atas, maka kita peroles:

$3! = 1.2.3 = 6,\ \ 4! = 1.2.3.4 = 24,\ 5! = 1.2.3.4.5 = 4!.5 = 120, dst$

Contoh 2:

Nyatakan bentuk $\frac{12.11.10}{1.2.3}$ dalam faktorial.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa

$$\frac{12.11.10}{1.2.3} = \frac{9!\,10.11.12}{9!\,1.2.3} = \frac{12!}{9!\,3!}$$

Contoh 3:

Sederhanakan bentuk berikut:

$i)\ \frac{(n+2)!}{n!} \qquad ii)\ \frac{(n-2)!}{(n+1)!}$

Pembahasan:

$$i)\ \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{n!.\,(n+1)\,(n+2)}{n!} = (n+1)\,(n+2)$$

$$ii)\ \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{(n-2)!}{(n-2)!\,(n-1)\,n\,(n+1)} = \frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)}$$

LATIHAN 1.2

1. Hitunglah: $6!,\ 7!,\ 8!$
2. Hitunglah: $i)\ \frac{13!}{11!} \quad ii)\ \frac{7!}{10!}$
3. Sederhanakan bentuk: $a)\ \frac{n!}{(n-1)!} \quad b)\ \frac{(n+2)!}{n!}$
4. Benar atau salahkan pernyataan berikut ini:
   a. $6!\,.\,3! = 9!$
   b. $5! - 5! = 0!$
   c. $\frac{7!}{3!} = 4!$
   d. $5! + 3! = 8!$

5. (OSP 2007) Untuk bilangan asli n, didefinisikan $n! = 1.2.3.4....n$. Dalam bentuk sederhana: $1!\,1 + 2!\,2 + 3!\,3 + ... + n!\,n = ...$

1.3. Permutasi

a. Permutasi Tanpa Pengulangan

Definisi

Misalkan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ merupakan n obyek berbeda. Suatu permutasi dari obyek-obyek ini merupakan penyusunan obyek-obyek tersebut dengan memperhatikan urutan. Untuk selanjutnya permutasi n obyek disebut sebagai n-permutasi.

Contoh 1:

Terdapat 6 permutasi untuk huruf-huruf pada kata EKI, yakni
EKI, EIK, KEI, KIE, IKE, IEK.

Teorema

Banyaknya permutasi r unsur yang diambil dari n buah unsur yang berbeda adalah $P(n,r) = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ untuk r < n. Dan $P(n,r)$ dibaca permutasi obyek r dari n.

Akibat Teorema

Perhatikan kasus spesial dari $P(n,r)$, jika n = r. Maka kita peroleh:
Ada n! Permutasi dari n obyek.

Contoh 2:

Banyaknya permutasi dari huruf-huruf dari kata RAMBUT adalah 6! = 720.

Contoh 3:

Misalkan dari huruf-huruf P, Q, dan R akan dibuat susunan terdiri dari 3 huruf maka ada berapa banyak susunan yang dapat dibuat?

Pembahasan:

Perhatikan bahwa masalah ini, adalah masalah permutasi dengan kasus $n = r = 3$, maka banyak susunan yang mungkin adalah 3! = 6.

Contoh 4:

Dengan berapa cara seorang *programmer* akan membuat *password* dengan menggunakan 4 huruf dari himpunan huruf $\{A,B,C,D,E,F,G,H\}$, jika satu huruf hanya digunakan sekali?

Pembahasan:

Banyak huruf yang tersedia 8 dan hanya digunakan 4 huruf, maka n =8 dan r=4, $P(8,4) = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680.$

Contoh 5:

Sebuah lemari memuat 5 buku berbahasa Jerman, 7 buku berbahasa, dan 8 buku berbahasa Indonesia. Diketahui bahwa tidak ada dua buku yang sama.

i. Berapa banyak penyusunan berbeda yang bisa dilakukan pada buku-buku ini?

ii. Berapa banyak penyusunan berbeda yang bisa dilakukan pada buku-buku ini jika buku-buku dari masing-masing bahasa harus diletakan berdekatan?

Pembahasan:

i. Perhatikan bahwa kita melakukan permutasi pada 5+7+8=20 buku. Maka banyaknya kemungkinan penyusunan adalah 20!.

ii. Buku-buku dengan bahasa yang sama di 'ikat' sehingga saling berdekatan. Perhatikan bahwa kita melakukan permutasi 3 bahasa, yakni dengan 3! Cara. Kemudian, kita lakukan permutasi pada buku-buku berbahasa Jerman dalam 5! Cara, pada buku-buku berbahasa Spanyol dalam 7! Cara, dan pada buku-buku berbahasa Indonesia dengan 8! Cara. Jadi, total banyaknya cara penyusunan buku adalah 3!.5!.7!.8!.

b. Permutasi dengan Pengulangan

Pada contoh 3, huruf-huruf yang disediakan semuanya berbeda yaitu P, Q, dan R. Bagaimana jika huruf-huruf yang disediakan ada yang sama. Misalkan pada contoh berikut:

Contoh 6:

Misalkan dari huruf-huruf P, Q, dan Q akan dibuat susunan yang terdiri dari 3 huruf maka ada berapa banyak susunan yang dapat dibuat?

Pembahasan:

Kita tidak bisa langsung menjawab bahwa banyaknya susunan adalah $P(3,3) = 6$ karena dalam kenyataannya banyaknya susunan hanya ada 3, yaitu PQQ, QPQ, dan QQP. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut

Contoh 7:

Ada berapa banyak carakah huruf-huruf dari kata **LALALILILU** dapat dipermutasi?

Pembahasan:

Misalkan kita memberi index pada setiap huruf yang berulang sehingga menjadi $\mathbf{L_1\ A_1\ L_2\ A_2\ L_3\ I_1\ L_4\ I_2\ L_5\ U}$

Maka sekarang terdapat 10 obyek, yang dapat dipermutasi dengan 10! cara yang berbeda. Untuk setiap 10! permutasi ini, huruf A_1A_2 dapat dipermutasi dengan 2! cara, $L_1L_2L_3L_4L_5$ dapat dipermutasi dengan 5! cara, dan huruf I_1I_2 dapat dipermutasi dengan 2! cara. Jadi, sebanyak 10! Terlalu banyak terhitung, dan dapat diperbaiki menjadi $\frac{10!}{2!.\ 5!.\ 2!}$.

Teorema

Misalkan terdapat k tipe obyek, dengan: n_1 obyek tipe 1, n_2 obyek tipe 2, dst. Maka banyaknya cara penyusunan dari $n_1 + n_2 + ... + n_k$ obyek ini adalah

$$\frac{(n_1 + n_2 + ... + n_k)!}{n_1!.\ n_2!....n_k!}$$

Contoh 8:

(OSK, Tipe 3/2012) Ada berapa cara menyusun semua huruf DUARIBUDUABELAS dengan syarat huruf I dan E berdekatan?

Pembahasan:

Karena I dan E harus berdekatan, maka sekarang terdapat 14 huruf dengan 2

huruf D, 2 huruf B, 3 huruf U, dan 3 huruf A.

Karena I dan E harus berdekatan, Anggap I dan E sabagai satu obyek. Banyaknaya susunan huruf I dan E ada 2

Banyak susunan yang mungkin adalah $2.\frac{14!}{2!\,2!\,3!\,3!} = 1.210.809.600.$

c. Permutasi Siklik

Bagaimana jika terdapat beberapa orang duduk dalam suatu lingkaran (siklis)? Ada berapa menyusun semuanya? Persoalan inilah yang berhubungan dengan permutasi siklis. Misalkan tersedia n unsur yang berbeda. Banyaknya permutasi siklis dari n unsur tersebut adalah:

$$(n-1)!$$

Contoh 9:

Dengan berapa cara 9 kue yang berbeda dapat disusun melingkar di atas sebuah meja?

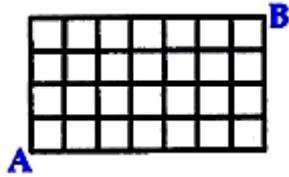
Pembahasan:

$P = (9-1)! = 8! = 40.320$

LATIHAN 1.3

1. Berapa banyak bilangan yang terletak diantara 100 dan 1000 yang dapat disusun dari digit-digit 0, 1, 2, 3, 4, 5, jika pengulangan digit tidak diperbolehkan?
2. Berapa banyak susunan yang mungkin dibuat dengan menggunakan digit-digit 1 sampai dengan 9 jika semua digitnya berbeda?
3. Tentukan nilai n sedemikian hingga: (i) $P(n,5) = 42\,P(n,3)$,$n > 4$

   (ii) $\frac{P(n,4)}{P(n-1,4)} = \frac{5}{3}$, $n > 4$
4. Tentukan banyaknya susunan 8-huruf berbeda yang dapat disusun dari kata "DAUGHTER" sedemikian hingga: (i) semua huruf vokal berdekatan (ii) semua huruf vokal tidak berdekatan
5. Ada berapa banyak cara menyusun disc yang terdiri dari 4 warna merah, 3 kuning, dan 2 hijau dalam satu baris jika disc dengan warna yang sama tidak dibedakan?
6. Tentukan banyaknya susunan huruf-huruf dari kata "INDEPENDENCE". Berapa banyak susunan huruf-huruf dari kata tersebut jika:
   (i) kata-kata tersebut diawali huruf P
   (ii) semua huruf vokal selalu berdekatan
   (iii) huruf vokal tidak berdekatan
   (iv) kata-kata tersebut diawali I dan diakhiri dengan P
7. Dalam suatu rapat OSIS yang terdiri dari 6 orang siswa (2 di antara kakak beradik) dalam posisi melingkar. Ada berapa formasi duduk melingkar yang bisa terbentuk jika kakak beradik tersebut harus berdekatan?
8. Banyaknya bilangan 5 angka yang memenuhi hasil kali angka-angkanya sama dengan 45 ada ....

9. Perhatikan gambar di bawah ini:

Jika seseorang akan berjalan dari titik A ke titik B. Ada berapa banyak cara jalan terpendek yang dapat dipilihnya?

10. (OSK 2011, Tipe 1) Terdapat 5 orang pria dan 5 orang wanita duduk dalam sederetan kursi secara random. Berapa banyaknya cara untuk menduduki kursi tersebut dengan syarat tidak boleh ada yang duduk berdampingan dengan jenis kelamin yang sama ?
11. (OSP 2011) Pada ruang Cartesius kita ingin bergerak dari titik (2, 0, 11) ke titik (20, 1, 1) selalu pada koordinat (x, y, z) dengan paling sedikit dua dari x, y, dan z adalah bilangan bulat, dan lintasan terpendek. Cara bergerak yang dimaksud sebanyak $\cdots\cdots$
12. (OSP 2006) Ada berapa banyaknya bilangan 7 angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka dari 2504224?
13. (OSP 2003) Empat pasang suami isteri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok isteri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?
14. (OSP 2008) Cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan ada sebanyak ....
15. (OSP 2009) Seekor semut hendak melangkah ke makanan yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Semut tersebut sedang mendapatkan hukuman, ia hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang. Tentukan banyaknya cara melangkah agar bisa mencapai makanan, jika ia harus melangkah tidak lebih dari dua puluh langkah. (Catatan : jika semut melangkah dua kali dimana masing-masing melangkah sekali ke belakang, maka dianggap sama saja dengan dua langkah ke belakang.)
16. (OSK 2004) Nomor polisi mobil-mobil di suatu negara selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap, mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak ada
17. (OSK, 2013) Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana setiap meja akan diduduki oleh minimal satu siswa. Banyaknya cara duduk untuk melakukan hal tersebut adalah ...

1.4. Kombinasi

Definisi

Kombinasi adalah suatu permutasi ”tanpa memperhatikan urutan unsur yang dipilih”

Secara umum, kombinasi r unsur dari n unsur yang diketahui dimana $r \le n$ adalah

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Penulisan simbol kombinasi dapat berupa:

$$C(n,r) = {}_nC_r = {}^nC_r = \binom{n}{r}$$

Akibat Rumus Kombinatorika

Misal n dan r bilangan bulat non-negatif dengan $r \le n$. Maka $C(n,r) = C(n, n-r)$ (*Bukti diserahkan pada pembaca*)

Contoh 1:

Dalam suatu kontes matematika, setiap siswa disuruh menjawab 5 soal dari 8 soal yang diajukan. Berapa banyak pilihan untuk menjawab soal tersebut?

Pembahasan:

Dalam kasus di atas, urutan nomor-nomor soal diabaikan. Permasalahannya adalah ada berapa cara memilih 5 soal soal dari 8 soal yang tersedia. Memilih 5 soal dari 8 soal = $C(8,5)$ maka,

$$C(8,5) = \frac{8!}{5!\,(8-5)!} = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 56\, cara.$$

Contoh 2:

Dalam berapa cara 9 peserta diskusi dibagi dalam dua kelompok yang terdiri dari 6 anggota dan 3 anggota?

Pembahasan:

Pada pembagian 9 orang menjadi dua kelompok, terdapat dua kemungkinan yaitu kelompok pertama dengan 6 anggota dan kelompok kedua 3 anggota atau sebaliknya. Sehingga banyak cara dalam membagi yaitu:

$$2.C(9,6) = 2.C(9,3) = 2\left(\frac{9.8.7}{3.2.1}\right) = 168$$

Contoh 3:

Jika terdapat 8 orang laki-laki dan 7 orang perempuan maka ada berapa cara membentuk panitia beranggotakan 7 orang dengan syarat sedikitnya 5 perempuan harus masuk dalam kepanitiaan tersebut?

Pembahasan:

Karena sedikitnya 7 orang panitia tersebut terdiri dari 5 perempuan, maka akan ada tiga kasus dalam persoalan ini yaitu panitia terdiri dari 5 perempuan dan 2 laki-laki atau 6 perempuan dan 1 laki-laki atau kesemuanya perempuan.

Banyaknya susunan kasus pertama adalah $C(7,5).C(8,2) = 588$

Banyaknya susunan kasus kedua adalah $C(7,6).C(8,1) = 56$

Banyaknya susunan kasus ketiga adalah $C(7,7).C(8,0) = 1$

Maka banyaknya cara membentuk panitia adalah $588 + 56 + 1 = 645$

Contoh 4:

Jika terdapat dua titik dengan tidak ada tiga titik yang berada pada satu garis lurus, maka banyaknya segitiga yang dapat dibuat dengan ketiga titik sudutnya dipilih dari 20 titik tersebut adalah ....

Pembahasan:

Segitiga dibentuk dari tiga titik yang tidak segaris. Maka banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah $C(20,3) = 1140$.

Teorema
Dari rumus kombinasi, maka kita dapat menurunkan rumus berikut:

$$C(n,r)+C(n,r-1)=C(n+1,r)$$

Bukti:
Perhatikan bahwa:

$$C(n,r)+C(n,r-1)=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}$$

$$=\frac{n!}{r.(r-1)!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}.\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}=C(n+1,r)$$

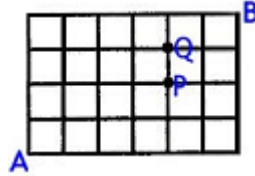
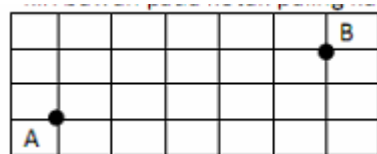
Aplikasi Rumus Kombinasi dalam Himpunan
Telah Kalian pelajari pada waktu SMP, tentang konsep himpunan bagian. Misal himpunan A memiliki n anggota, Maka banyaknya himpunan bagian dari A sama dengan 2^n.

Adapun jika kita ingin mencari banyaknya himpunan bagian A yang hanya memiliki r anggota saja, maka kita dapat menggunakan rumus kombinasi di atas. Banyaknya himpunan bagian dari A yang memiliki r elemen ($r \le n$) adalah $C(n,r)$.

Contoh 5:
Misalkan himpunan $A=\{1,2,3,4\}$, tentukan banyaknya himpunan bagian yang terdiri dari 3 anggota.
Pembahasan:
Perhatikan bahwa kasus ini dapat dimisalkan n = 4, r =3. Sehingga banyaknya himpunan bagia A yang terdiri dari 3 anggota adalah $C(4,3)=4$.

Contoh 6:
Banyaknya himpunan bagian dari kata "SMA DARUL ULUM DUA"
Pembahasan:
Banyaknya anggota himpunan yang memuat kata "SMA DARUL ULUM DUA" ada 7. Banyaknya himpunan bagiannya ada $2^7=128$.

LATIHAN 1.4A
1. Jika $C(n,8)=C(n,2)$, maka tentukan nilai $C(n,2)$.
2. Tentukan nilai n jika $C(2n,2):C(n,2)=12:1$
3. Suatu panitia terdiri dari 3 anggota yang akan dibentuk dari 2 laki-laki dan 3 perempuan. Ada berapa banyak cara menyusun permasalahan ini? Berapa banyak susunan panitia ini yang berisi 1 laki-laki dan 3 wanita?
4. Tentukan banyaknya cara memilih 9 bola dari 6 bola merah, 5 bola putih, dan 5 bola biru jika masing-masing pemilihan berisi 3 bola untuk tiap warnanya.

5. (OSK 2011, Tipe 1 &3) Sekelompok orang akan berjabat tangan. Setiap orang hanya dapat melakukan jabat tangan sekali. Tidak boleh melakukan jabat tangan dengan dirinya sendiri. Jika dalam sekelompok orang terdapat 190 jabat tangan, maka banyaknya orang dalam kelompok tersebut ada berapa?
6. Sebuah benda akan digerakkan dari titik A(0,0) ke titik B(6,4) namun benda tersebut hanya dapat bergerak ke atas ke kanan melalui titik-titik koordinat.

   a Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B ?
   b Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B namun harus melalui titik P(4,2) ?
   c Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B namun harus melalui ruas PQ dengan Q(4,3) ?
7. (OSK 2011, Tipe 1) Ada berapa banyak bilangan bulat positif berlambang "abcde" dengan a < b ≤ c < d < e ?
8. (OSP 2011) Diketahui segi empat ABCD. Semua titik A, B, C, dan D akan diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6 sehingga setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya berbeda. Banyaknya cara pemberian nomor dengan cara tersebut ada sebanyak · · ·
9. (OSP 2011) Banyaknya kemungkinan bilangan asli berbeda a, b, c, dan d yang kurang dari 10 dan memenuhi persamaan a + b = c + d ada sebanyak · · ·
10. (OSP 2011) Sepuluh orang siswa duduk dalam suatu baris. Semua siswa bangkit dan duduk kembali pada baris tersebut dengan aturan setiap siswa dapat duduk kembali pada kursi yang sama atau pada kursi yang berada di sebelah kursi lamanya. Banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak · · ·
11. (OSK 2010) Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2, 3, ..., 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, ..., 2010\}$ adalah ....
12. (OSK 2010) Diketahui grid berukuran 4 x 7. Jika langkah yang dimunkinkan Kanan, Kiri, Atas, dan Bawah. Cara menuju B dari A dalam 8 langkah atau kurang ada sebanyak .... (A adalah titik pada ujung kiri bawah pada kotak paling kanan atas)

13. (OSP 2010) Bilangan enam digit $\overline{abcdef}$ dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak ....
14. (OSP 2010) Dua puluh tujuh siswa pada suatu kelas akan dibuat menjadi enam kelompok diskusi yang masing-masing terdiri dari empat atau lima siswa. Banyaknya cara adalah · · · ·

15. (OSK 2009) Nilai eksak dari $\binom{2009}{1}+\binom{2009}{2}+\binom{2009}{3}+\ldots+\binom{2009}{1004}$ adalah ...
16. Misalkan N menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif dan $S=\left\{n\in N \left| \frac{n^{2009}+2}{n+1}\in N\right.\right\}$. Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ....
17. (OSP 2009) Seekor semut hendak melangkah ke makanan yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Semut tersebut sedang mendapatkan hukuman, ia hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang. Tentukan banyaknya cara melangkah agar bisa mencapai makanan, jika ia harus melangkah tidak lebih dari dua puluh langkah. (Catatan : jika semut melangkah dua kali dimana masing-masing melangkah sekali ke belakang, maka dianggap sama saja dengan dua langkah ke belakang.)
18. (OSK 2008/OSP 2005/AHSME 1972) Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1,2\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ adalah ....
19. (OSK 2007) Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari 2007. Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah ....
20. (OSK 2006) Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan (salaman). Setiap dua orang salaing berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah
21. (OSK 2004) Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ....
22. (OSK 2004) Sepuluh tim mengikuti turnamen sepakbola. Setiap tim bertemu satu kali dengan setiap tim lainnya. Pemenang setiap pertandingan memperoleh nilai 3, sedangkan yang kalah memperoleh nilai 0. Untuk pertandingan yang berakhir seri, kedua tim memperoleh nilai masing-masing 1. Di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124. Banyaknya pertandingan yang berakhir seri adalah .....
23. (OSK 2003) Dari sepuluh orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggota dua orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini ?
24. (OSP 2003) Berapakah banyaknya cara memilih tiga bilangan berbeda sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan, jika bilangan-bilangan tersebut dipilih dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,9,10\}$?
25. (OSK, Tipe 3/2012) Dalam suatu pertemuan, setiap pria berjabat tangan dengan setiap orang kecuali dengan istrinya; dan tidak ada (tidak dilakukan) jabat tangan diantara sesama wanita. Jika yang menghadiri pertemuan tersebut ada sebanyak 13 pasang suami-istri, ada berapa banyak jabat tangan yang dilakukan oleh 26 orang tersebut?
26. (OSK, Tipe 1/2012) Diketahui suatu kelas terdiri dari 15 siswa. Semua siswa tersebut akan dikelompokan menjadi 4 kelompok yang terdiri dari 4, 4, 4, dan 3 siswa. Ada berapa cara pengelompokan tersebut?
27. (OSK 2013) Tentukan semua bilangan tiga digit yang memenuhi syarat bahwa bilangan tersebut sama dengan penjumlahan dari faktorial setiap digitnya.

Kombinasi dengan Pengulangan

Perhatikan permasalahan di bawah ini:

(*) Berapa banyak solusi bulat yang memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 10$*, dengan* $x_i \geq 0$?

Masalah di atas, termasuk **Persamaan dengan Solusi Bilangan Bulat**. Dan masalah ini equivalen dengan tiga kondisi berikut:

- Banyaknya cara memilih r obyek dari n obyek dengan pengulangan.
- Banyaknya cara mendistribusikan r bola identik ke dalam n lubang berbeda dengan syarat tiap-tiap lubang memuat dengan jumlah sebarang.
- Banyaknya solusi bilangan bulat yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = r,\ x_i \geq 0$.

Sebelum kita bahas lebih lanjut, tentang kombinasi dengan pengulangan. Perhatikan rumus-rumus berikut tentang Permutasi & Kombinasi

- Ada n^r cara menditribusikan r bola berbeda ke dalam n lubang berbeda dengan syarat tiap-tiap lubang memuat dengan jumlah sebarang
- Ada P(n, r) cara menditribusikan r bola berbeda ke dalam n lubang berbeda dengan syarat tiap-tiap lubang memuat paling banyak 1 bola.
- Ada C(n, r) cara menditribusikan r bola identik ke dalam n lubang berbeda dengan syarat tiap-tiap lubang memuat paling banyak 1 bola.
- Ada $\binom{n-1+r}{r}$ cara menditribusikan r bola identik ke dalam n lubang berbeda dengan syarat tiap-tiap lubang memuat dengan jumlah sebarang.

Sehingga Rumus untuk Kombinasi berulang, yang salah satunya untuk menyelesaikan masalah (*) di atas adalah:

$$\binom{n-1+r}{r}$$

Jadi, masalah (*) n=3, r =10 sehingga banyaknya solusi bulatnya adalah $\binom{3-1+10}{10} = 66$.

Contoh 1:

- ✓ Suatu toko menjual 5 jenis roti dalam kaleng. Nabilah membeli 6 kaleng roti tersebut. Banyaknya cara memilih roti kalengan adalah $\binom{5-1+6}{6} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\ 6!}$
- ✓ Banyaknya penyelesaian bulat tidak negatif dari $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ adalah $\binom{4-1+6}{6} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3!\ 6!}$
- ✓ Ada 10 bola dimasukan dalam 6 lubang. Setiap lubang dapat memuat seluruh bola. Banyakanya cara memasukan bola-bola itu adalah $\binom{6-1+10}{10} = \binom{15}{10} = \frac{15!}{9!6!}$

Contoh 2:

Berapa banyak solusi bulat non-negatif yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 99$?

Pembahasan:

Permasalahan di soal, bisa kita buat kasus-kasus berikut:

- ✓ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

- ✓ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$
- ✓ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

.
.
.

- ✓ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 99$

Kasus pertama memiliki $C(4-1+0,0)$ solusi, kasus kedua memiliki $C(4-1+1,1)$ solusi, dst. Jadi banyaknya solusi untuk permasalahan pada soal adalah $C(4-1+0,0)+C(4-1+1,1)+...+C(4-1+99,99)$ (^).

Perhatikan bahwa permasalahan pada soal juga equivalen dengan mencari banyaknya solusi bulat untuk $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=99$. Mengapa ini equivalen? Ya, karena x_5 dapat bernilai mulai 0, 1, 2, ..., 99, dan untuk kasus $x_5=k$ adalah sama dengan kasus $x_1+x_2+x_3+x_4=99-k$. Jadi banyaknya solusi adalah $C(5-1+99, 99)=4.421.275$ (^^)

Karena (^) & (^^) harus sama, maka $C(4-1+0,0)+C(4-1+1,1)+...+C(4-1+99,99)=C(5-1+99,99)$. Secara umum identitas ini berlaku:

- $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+....+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}$

Contoh 3:

Berapa banyak solusi bulat yang memenuhi $2x_1+x_2+x_3=4,\ x_i\geq 0$

Pembahasan:

Jika kita misalkan $Y_1=2x_1, Y_2=x_2,\ \& Y_3=x_3$, maka persamaan disoal equivalen dengan $Y_1+Y_2+Y_3=4$ dimana $Y_1=0,2,4,....,Y_2\geq 0, Y_3\geq 0$. Untuk menyelesaikan ini, kita bagi ke dalam kasus demi kasus melihat pada variabel Y_1.

- Kasus 1:
  $Y_1=0$, Maka kita punya $Y_2+Y_3=4\ \ Y_i\geq 0$. Jadi banyaknya solusi bulat adalah $C(2-1+4,4)$
- Kasus 2:
  $Y_1=2$, Maka kita punya $Y_2+Y_3=2\ \ Y_i\geq 0$. Jadi banyaknya solusi bulat adalah $C(2-1+2,2)$
- Kasus 3:
  $Y_1=4$, Maka kita punya $Y_2+Y_3=0\ \ Y_i\geq 0$. Jadi banyaknya solusi bulat adalah $C(2-1+0,0)=1$

Dengan aturan penjumlahan, banyaknya solusi untuk permasalahan pada soal adalah $C(2-1+4, 4)+C(2-1+2, 2)+C(2-1+0, 0)=9$.

Contoh 4:

Berapa banyak solusi bulat yang memenuhi $x_1+x_2+x_3=0,\ x_i\geq -5$?

Pembahasan:

Misalkan $Y_i=x_i+5$, maka kita peroleh persamaan baru yang equivalen dengan persamaan pada soal: $Y_1-5+Y_2-5+Y_3-5=0,\ Y_i\geq 0$ atau

$Y_1+Y_2+Y_3=15, Y_i\geq 0$. Jadi banyaknya solusinya adalah $C(3-1+15,15)=136$.

LATIHAN 1.4B

1. Tuliskan ke dalam bentuk persamaan dengan solusi bulat dari pernyataan-pernyataan berikut:
   a. Banyaknya cara mendistribusikan r bola identik ke dalam n lubang berbeda dimana dimana pada lubang pertama memuat sedikitnya k bola.
   b. Banyaknya cara mendistribusikan r bola identik ke dalam n lubang berbeda sedemikian hingga tidak ada lubang yang memuat lebih dari 2 bola.
   c. Banyaknya cara membagi r rupiah uang ke dalam uang 1 rupiah-an, seratus-an rupiah, dan lima ratusan rupiah.
2. Berapa banyaknya solusi bulat yang ada pada persamaan $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15, x_k\geq 0$? dimana $x_k\geq -3$? dimana $x_k\geq 2k$?
3. Berapa banyaknya solusi bulat yang ada pada persamaan $x_1+x_2+x_3\leq 10, x_k\geq 0$? dimana $x_k\geq -2$? dimana $x_k\geq 2k$?
4. Berapa banyaknya solusi bulat yang ada pada persamaan $2x_1+x_2+x_3=12$ dimana $x_k\geq 0$? dimana $x_k\geq -1$?
5. Berapa banyaknya solusi bulat yang memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20 \\ x_1+x_2+x_3=5 \end{cases}$, $\text{dimana } x_k\geq 0$?
6. Berapa banyaknya kemungkinan jika kita melempar tiga buah dadu berbeda sehingga menghasilkan jumlah sepuluh?
7. Sebuah toko memiliki 10 buah balon merah, 9 buah balon kuning, dan 11 buah balon hijau. Seorang pembeli ingin membeli 8 buah balon. Ada berapa banyak cara pembeli tersebut membeli balon?
8. Tentukan banyakanya pasangan bilangan asli (a,b,c,d) yang memenuhi $a+b+c+d=17$.
9. Tentukan banyaknya tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi persamaan $x+y+z=18$ dengan syarat $x\geq 3, y\geq 4, \& z\geq 5$?
10. Tentukan banyaknya tripel bilangan bulat (x,y,z) yang memenuhi persamaan $x+y+z=9$ dengan syarat $0\leq x\leq 4, 0\leq y\leq 5, 0\leq z\leq 3$.

11. Misalkan terdapat sepuluh bola yang identik, dan keranjang yang dinomori 1, 2, 3, ..., 8. Tentukan banyaknya cara mendistribusikan bola ke dalam keranjang agar setiap keranjang terisi sedikitnya 1 bola.

12. Dua puluh apel dan 15 jeruk dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapat lebih dari 1 buah apel atau jeruk, atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dapat dilakukan?

13. (OSP 2009) Tiga dadu berwarna hitam, merah, dan putih dilempar bersama-sama. Macam hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu adalah 8 sebanyak ....

14. (OSP 2004) Berapakah banyaknya barisan bilangan bulat tak negatif (x,y,z) yang memenuhi persamaan $x+y+z=99$?

15. Berapa banyaknya penyelesaian bulat taka negatif dari $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 = 10$ jika $x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 6, \quad \& \, x_7 > 0$
16. Carilah banyaknya penyelesaian bulat $x + y + z < 14,\ x \geq 2,\ y \geq 3,\ 2 < z < 5$.
17. Carilah banyaknya cara menempatkan 15 bola dalam 5 kotak berbeda sehingga kotak pertama berisi paling sedikit satu bola dan paling banyak 3 bola, kotak kedua berisi dua bola sampai dengan 4 bola, dan kotak-kotak yang lain paling sedikit berisi dua bola.

1.5. Binomial Newton

a. Segitiga Pascal

Perhatikan penjabaran dari suku-suku berikut (ingat bahwa $a^0 = 1$ untuk semua bilangan real a):

$$
\begin{aligned}
(1+x)^0 &= x^0 \\
(1+x)^1 &= x^0 + x^1 \\
(1+x)^2 &= x^0 + 2x^1 + x^2 \\
(1+x)^3 &= x^0 + 3x^1 + 3x^2 + x^3 \\
(1+x)^4 &= x^0 + 4x^1 + 6x^2 + 4x^3 + x^4.
\end{aligned}
$$

Jika hanya koefisiennya saja yang kita tulis, maka kita peroleh bentuk berikut:

Baris 1 : 1
Baris 2 : 1 1
Baris 3 : 1 2 1
Baris 4 : 1 3 3 1
Baris 5 : 1 4 6 4 1

Untuk setiap bilangan bulat non-negatif n, maka entri baris ke-n adalah koefisien dari pangkat x dalam penjabaran $(1+x)^{n-1}$. Bilangan-bilangan yang merupakan koefisien dalam penjabaran sebarang jumlah dua bilangan $(a+b)^n$, dikenal dengan ***Koefisien Binomial***. Susunan dari bilangan-bilangan koefisien binomial lebih dikenal dengan sebutan ***Segitiga Pascal***.

Contoh 1:

Gunakan segitiga pascal untuk menemukan penjabaran dari $(x+y)^5$.

Pembahasan:

Perhatikan susunan segitiga pascal untuk 6 baris:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Kita sekarang memiliki: $x + y = x\left(1 + \frac{y}{x}\right); \quad x \neq 0,$

Jadi: $(x+y)^5 = x^5\left(1 + \frac{y}{x}\right)^5,$ dan

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^5=1\left(\frac{y}{x}\right)^0+5\left(\frac{y}{x}\right)^1+10\left(\frac{y}{x}\right)^2+10\left(\frac{y}{x}\right)^3+5\left(\frac{y}{x}\right)^4+1\left(\frac{y}{x}\right)^5.$$

$$=1+\frac{5y}{x}+\frac{10y^2}{x^2}+\frac{10y^3}{x^3}+\frac{5y^4}{x^4}+\frac{y^5}{x^5}.$$

Sekarang,

$$(x+y)^5=x^5\left(1+\frac{y}{x}\right)^5$$

$$=x^5\left(=1+\frac{5y}{x}+\frac{10y^2}{x^2}+\frac{10y^3}{x^3}+\frac{5y^4}{x^4}+\frac{y^5}{x^5}\right)$$

$$=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$

Contoh 2:

Jabarkan bentuk dari $(3+2x)^4$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$$(3+2x)^4=3^4(2x)^0+4.3^3(2x)^1+6.3^2.(2x)^2+4.3^1.(2x)^3+3^0.(2x)^4$$

$$=81+216x+216x^2+96x^3+16x^4.$$

b. Rumus untuk Koefisien

Teorema Binomial

$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,y^{n-k}$ dimana $x,y\in\Re$ dan n bilangan asli, serta $\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

Akibat 1 Teorema Binomial

Misal n bilangan bulat non-negatif. Maka

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.$$

(*Bukti diserahkan pembaca*).

Akibat 2 Teorema Binomial

Misal bilangan bulat non-negatif. Maka

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0.$$

(*Bukti diserahkan pembaca*).

Akibat 3 Teorema Binomial

Misal bilangan bulat non-negatif. Maka

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n.$$

(*Bukti diserahkan pembaca*).

Teorema Identitas Pascal

Misal n dan k bilangan bulat positif dengan $n \geq k$. Maka

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Teorema Identitas Vandermonde

Misal m, n, dan r bilangan bulat non-negatif dengan r tidak melebihi m atau n. Maka

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

Akibat Teorema Identitas Vandermonde

Jika n bilangan bulat non-negatif, maka

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

(*Bukti diserahkan pembaca*).

Contoh 3:

Tentukan koefisien dari x^3 dari penjabaran $(2+3x)^{15}$.

Pembahasan:

$$(2+3x)^{15} = \sum_{k=0}^{15} \binom{15}{k} (3x)^k \ 2^{15-k}.$$

Untuk suku x^3 dapat kita peroleh ketika k = 3, sehingga kita peroleh bentuk $\binom{15}{3}.\ 2^{12}.27.x^3$.Jadi, koefisien dari x^3 adalah $\binom{15}{3}.2^{12}.27$.

Contoh 4:

Tentukan suku constan dalam penjabaran bentuk $\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12}$.

Pembahasan:

$$\left(x + \frac{1}{x^3}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^k \left(x^{-3}\right)^{12-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{-36+3k+k} = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} x^{-36+4k}.$$

Untuk mendapatkan suku konstan, maka haruslah $-36+4k = 0 \leftrightarrow k = 9$.

Sehingga suku konstannya adalah $\binom{12}{9} = 220$.

c. Rumus Koefisien Lanjutan

Definisi

Jika n_1, n_2, n_3, ...,n_r adalah bilangan-bilangan bulat tidak negatif sedemikian sehingga $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$, maka

$$\binom{n}{n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$$

Akibat

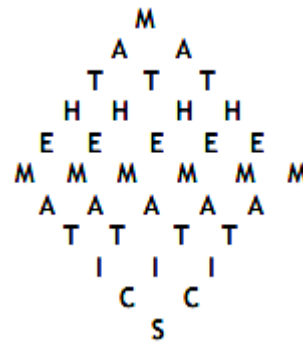
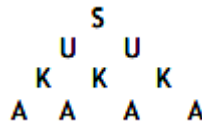
Jika $n, r \in \mathbb{N}$, maka koefisien dari $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$ pada $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ adalah $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$ yang mana n_i $(1 \le i \le r)$ adalah bilangan-bilangan bulat dengan $0 \le n_i \le n$ dan $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$

Contoh 5:

- ✓ $\binom{6}{1,\ 2,\ 3} = \frac{6!}{1!\,2!\,3!} = 60$
- ✓ $\binom{8}{5,\ 2,\ 0,\ 1} = \frac{8!}{5!\,2!\,0!\,1!} = 168$
- ✓ Koefisien a^2bc^2 dari $(a+b+c)^5$ adalah $\frac{5!}{2!\,1!\,2!} = 30$
- ✓ Koefisien a^2bc^2 dari $(2a+3b+c)$ adalah $\frac{5!}{2!\,1!\,2!}\ 2^2.3^1.1^2 = 30.4.3 = 360$

LATIHAN 1.5

1. Hitung dua digit dari bilangan 11^{11}.
2. Tentukan koefisien x^3 dalam penjabaran $(1 + x + x^2 + x^3)^{12}$.
3. Jika $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$ dan $x > 0$, maka hitunglah nilai dari $x^5 + \frac{1}{x^5}$.
4. Tentukan koefisien x^{13} dalam penjabaran $(1 + x^4 + x^5)^{10}$.
5. (OSK 2009) Nilai eksak dari $\binom{2009}{1} + \binom{2009}{2} + \ldots + \binom{2009}{1004}$ adalah ...
6. (AIME 1983) Tentukan sisanya jika $6^{83} + 8^{83}$ dibagi 49.
7. Sederhanakan bentuk: $(a+b)^4 - (a-b)^4$. Selanjutnya, maka hitunglah nilai dari $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$.
8. Tentukan nilai dari $(x+1)^6 + (x-1)^6$. Selanjutnya, maka hitunglah $(\sqrt{2}+1)^6 + (\sqrt{2}-1)^6$.
9. Buktikan bahwa $\sum_{r=0}^{n} 3^r.\ {}^nC_r = 4^n$
10. Manakah yang lebih besar $(1{,}01)^{1\,000\,000}$ atau 10.000?
11. (OSK 2011) Koefisien x^4 dari penjabaran $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ adalah ...
12. (OSP 2007) Suku konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah ...
13. (OSP 2008) Nilai dari $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k} = \ldots$
14. (OSP 2010) Jumlah suku konstanta dari $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8$ adalah ...
15. (OSP 2010) Nilai $\sum_{j=0}^{n} \left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = \ldots$

16. Ada berapa banyak cara menyusun kata MATHEMATICS dimulai dari atas ke bawah jika huruf-huruf yang diambil harus berdekatan.

17. Tentukan banyaknya cara menyusun kata SUKA dari atas ke bawah pada susunan berikut jka huruf-huruf yang diambil harus berdekatan.

2. Peluang Suatu Kejadian

Pengertian dasar peluang yang muncul dalam soal-soal Olimpiade melibatkan situasi yang mengharuskan kita perlu menghitung bilangan yang menyatakan jumlah kemungkinan keberhasilan dari beberapa keluaran tertentu dan bilangan yang menyatakan banyak kemungkinan semua keluaran. Jika semua kejadian memiliki kemungkinan yang sama untuk terjadi, maka peluang keberhasilannya adalah hasil bagi dari dua bilangan tersebut.

Peluang bahwa suatu kejadian terjadi didefinisikan sebagai

$$\frac{Banyaknya\,cara\,berbeda\,agar\,kejadian\,tersebut\,dapat\,terjadi}{Banyaknya\,kemungkinan\,semua\,keluaran}$$ atau dengan kata lain:

Jika A suatu kejadian dan S suatu ruang sampel, dimana $A \subseteq S$, maka peluang kejadian A dinyatakan sebagai berikut:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Dimana $n(A)$: banyaknya anggota himpunan A dan $n(S)$: banyaknya anggota dalam himpunan ruang sampel.

Kisaran Nilai Peluang

Jika S adalah suatu ruang sampel dari suatu percobaan, A adalah suatu kejadian, dan P adalah suatu fungsi peluang, maka $P(A)$ adalah peluang kejadian A yang benilai real jika memenuhi tiga sifat berikut:

- ✓ Untuk setiap A, $0 \leq P(A) \leq 1$
- ✓ $P(S) = 1$
- ✓ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$, untuk A_1 & A_2 yang saling lepas.

Frekuensi Harapan

Dalam sejumlah percobaan, Frekuensi harapan dari suatu kejadian sama dengan *peluang kejadian tersebut dikalikan banyak percobaan*. Atau disimbolkan dengan

$$F_h(A) = P(A)\ x\ n$$

$F_h(A)$: Frekuensi harapan kejadian A

$P(A)$: Peluang kejadian A

n: banyaknya percobaan

Komplemen Suatu Kejadian

Kejadian bukan A dari himpunan semesta S ditulis dengan simbol A' *atau* A^c. Dan disebut sebagai komplemen himpunan A. Dan berlaku rumus.

$$P(A) = 1 - P\left(A^C\right) \vee P\left(A^c\right) = 1 - P(A)\ \vee P(A) + P\left(A^c\right) = 1$$

Kejadian Majemuk

✓ **Dua kejadian saling lepas**

Apabila A_1 & A_2 adalah kejadian-kejadian dalam suatu percobaan dan jika:

- $A_1 \cap A_2 = \phi$ maka A_1 & A_2 disebut kejadian yang *saling lepas* dan $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$;
- $A_1 \cap A_2 \neq \phi$ maka A_1 & A_2 disebut kejadian yang *tidak saling lepas* dan $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;

✓ **Dua kejadian saling bebas**

Apabila A_1 & A_2 adalah dua kejadian dengan syarat bahwa peluang bagi kejadian A_1 tidak mempengaruhi kejadian A_2, maka A_1 & A_2 disebut sebagai **kejadian-kejadian saling bebas**. Dan berlaku rumus

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2)$$

✓ **Dua kejadian bersyarat tidak saling bebas**

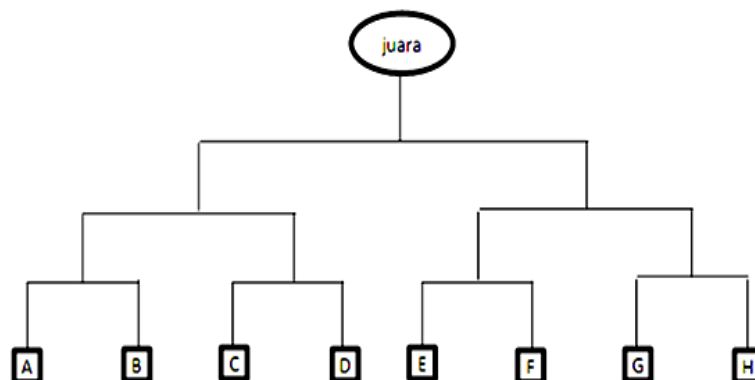
Apabila A_1 & A_2 adalah dua kejadian dengan syarat bahwa peluang bagi kejadian A_1 akan mempengaruhi kejadian A_2, maka A_1 & A_2 disebut sebagai **kejadian-bersyarat tidak saling bebas**. Dan berlaku rumus

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).\ P(A_2 | A_1)$$

$P(A_2|A_1)$ dibaca peluang kejadian A_2 dengan syarat A_1 terjadi atau peluang bersyarat kejadian A_2 setelah diketahui kejadian A_1.

LATIHAN 2A

1. Pada percobaan melemparkan sebuah dadu bersisi enam, berapakah peluang munculnya mata dadu lebih dari empat?
2. Jika 2 kartu diambil secara acak dari 1 set kartu bridge, berapa peluang mendapatkan keduanya sekop?
3. Sekeping uang logam dilemparkan 30 kali, maka frekuensi harapan muncul gambar adalah ....
4. Dua bola diambil secara acak dari sebuah kantong yang terdiri dari 10 bola merah dan 8 bola biru. Berapa peluang mendapatkan sedikitnya satu bola biru?
5. Jika peluang hari esok akan turun hujan adalah 0,45. Berapa peluang bahwa cuaca akan cerah esok hari?
6. Pada pengambilan 1 kartu secara acak dari 1 set kartu bridge , berapa peluang mendapatkan kartu As atau King?

7. Pada percobaan melempar dua dadu bersama-sama, tentukan peluang untuk mendapatkan kedua mata dadu:
   i. berjumlah 3,
   ii. berjumlah 8,
   iii. berjumlah 3 dan 8,
   iv. berjumlah 3 atau 8.
8. Sebuah dadu bersisi enam dilemparkan dua kali. Berapakah peluang bahwa nomor yang muncul pada lemparan pertama adalah 2 dan nomor yang muncul pada lemparan kedua lebih dari 2?
9. Dalam sebuah kantong terdapat 8 bola merah, 7 bola kuning, dan 5 bola hijau yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama. Tiga bola diambil satu persatu tanpa pengembalian . Berapakah peluang mendapatkan ketiga bola itu:
   i. berwarna merah,
   ii. berurut-turut berwarna merah – kuning – hijau?
10. (OSK 2011, Tipe 1) Enam dadu dilempar satu kali. Probabilitas banyaknya mata yang muncul berjumlah 9 adalah ....
11. (OSK 2011, Tipe 3) Dua buah dadu dilempar secara bersamaan. Sisi dadu pertama diberi angka 1, 2,2, 3, 3, dan 4. Sisi dadu kedua diberi angka 1, 3, 4, 5, 6, dan 8. Propabilitas agar jumlah kedua sisi atas sama dengan 5, 7, atau 9 adalah ….
12. (OSP 2011) Dua dadu memiliki angka satu sampai 6 yang dapat dilepas dari dadu. Kedua belas angka tersebut dilepaskan dari dadu dan dimasukkan ke dalam suatu kantong. Secara acak diambil satu angka dan dipasangkan ke salah satu dari kedua dadu tersebut. Setelah semua angka terpasangkan, kedua dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang munculnya angka tujuh sebagai jumlah dari angka pada bagian atas kedua dadu tersebut adalah . . . . .
13. (OSP 2011) Misalkan A adalah himpunan semua pembagi positif dari 10^9. Jika dipilih dua bilangan sebarang x dan y di A (boleh sama), tentukan peluang dari kejadian x membagi y.
14. (OSK 2010) Perempat final Liga Champions 2010 diikuti 8 team A, B, C, D, E, F, G, dan H yang bertemu seperti tampak dalam undian berikut:

Setiap team mempunyai peluang 1/2 untuk melaju ke babak berikutnya. Peluang kejadian A bertemu G di final dan pada akhirnya A juara adalah ...

15. (OSP 2009) Ada empat pasang sepatu akan diambil empat sepatu secara acak. Peluang bahwa yang terambil ada yang berpasangan adalah · · · · · ·
16. (OSK 2008) Dua buah dadu identik (sama persis) dilemparkan bersamaan. Angka yang muncul adalah a dan b. Peluang a dan b terletak pada sisi-sisi yang bertolak belakang (di dadu yang sama) adalah · · · ·
17. (OSP 2008) Anggap satu tahun 365 hari. Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah · · · · · · ·
18. (OSP 2008) Tiga bilangan dipilih secara acak dari {1,2,3, · · ·,2008}. Peluang jumlah ketiganya genap adalah · · ·
19. (OSK 2007) Peluang menemukan di antara 3 orang ada paling sedikit 2 orang yang lahir dalam bulan yang sama adalah….
20. (OSK 2006) Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah ...
21. (OSP 2006) Sebuah kelas akan memilih seorang murid di antara mereka untuk mewakili kelas tersebut. Setiap murid mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih. Peluang seorang murid laki-laki terpilih sama dengan $\frac{2}{3}$ kali peluang terpilihnya seorang murid perempuan. Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah · · · ·
22. (OSP 2006) Win memiliki dua koin. Ia akan melakukan prosedur berikut berulang-ulang selama ia masih memiliki koin : lempar semua koin yang dimilikinya secara bersamaan; setiap koin yang muncul dengan sisi angka akan diberikannya kepada Albert. Tentukan peluang bahwa Win akan mengulangi prosedur ini lebih dari tiga kali.

23. (OSK 2005) Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Berapakah peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 ?
24. (OSP 2005) Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang jumlah kedua angka yang muncul adalah bilangan prima adalah · · · ·
25. (OSP 2005) Di dalam sebuah kotak terdapat 4 bola yang masing-masing bernomor 1, 2, 3 dan 4. Anggi mengambil bola secara acak, mencatat nomornya, dan mengembalikkannya ke dalam kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Misalkan jumlah dari keempat nomor bola yang terambil adalah 12. Berapakah pelaung bola yang terambil selalu bernomor 3?
26. (OSK 2004) Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak diambil dua bola sekaligus. Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah ...
27. (OSP 2004) Dari antara 6 buah kartu bernomor 1 sampai 6 diambil dua kartu secara acak. Berapakah peluang terambilnya dua kartu yang jumlah nomornya adalah 6?
28. (OSP 2003) Upik melemparkan n dadu. Ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah peluang tersebut paling besar?
29. (OSK, Tipe 1;2;3/2012) Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan

15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan propabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?

30. (OSK, Tipe 1;2;3/2012) Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan propabilitas jumlah mata yang muncil 27.
31. (OSP 2012) Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk segi delapan beraturan bermata 1, 2, 3, ..., 8. Empat dadu tersebut ditos dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar ...
32. (OSK 2013) Suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dari titik (0,0). Setiap langkah bergerak satu satuan searah sumbu X positif dengan probabilitas 0,6 atau searah sumbu Y positif dengan probabilitas 0,4. Setelah sepuluh langkah, probabilitas partikel tersebut sampai pada titik (6,4) dengan melalui titik (3,4) adalah ....
33. (OSK, 2013) Sepuluh kartu ditulis angka satu sampai sepuluh (setiap kartu hanya terdapat satu angka dan tidak ada dua kartu yang memiliki angka yang sama). Kartu-kartu tersebut dimasukan kedalam kotak dan diambil satu secara acak. Kemudian sebuah dadu dilempar. Probabilitas dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah ...

LATIHAN 2B

1. (AMC 10A/2004) Uang logam A dilemparkan sebanyak tiga kali dan uang logam B dilemparkan sebanyak 4 kali. Berapakah peluang bahwa banyaknya muncul Gambar yang diperoleh dari pelemparan dua uang logam tersebut adalah sama?
2. (AMC 10B/2003) Sebuah kantung berisi dua kelereng Merah dan dua kelereng Hijau. Masukkan tangan ke kantung dan ambillah sebuah kelereng, kemudian tukarlah dengan kelereng Merah (tidak peduli warna apa pun yang diambil). Berapa peluang bahwa semua berwarna merah setelah tiga kali penggantian?
3. (AMC 12A/2003) Berapa peluang bahwa sebuah faktor positif dari 60 yang diambil secara acak adalah kurang dari 7?
4. (AMC 12A/2003) Sebuah titik P dipilih secara acak di dalam segitiga sama sisi ABC. Berapakah peluang bahwa luas segitiga ABP lebih besar dari luas segitiga ACP maupun segitiga BCP?
5. (AMC 12B/2003) Suatu benda bergerak sejauh 8 cm dalam garis lurus dari A ke B, kemudian berputar sejauh α (dalam radian) menuju titik C (dalam garis lurus) sejauh 5 cm. Jika di pilih α secara acak dalam interval $(0,\pi)$, berapakah peluang bahwa $AC < 7$?
6. (AMC 12B/2003) Misalkan S adalah himpunan semua permutasi dari barisan bilangan 1, 2, 3, 4, 5 yang suku pertamanya bukan 1. Sebuah permutasi dipilih secara acak dari S, peluang bahwa suku keduanya 2 adalah $\frac{a}{b}$, dimana FPB(a,b)=1. Tentukan nilai dari a + b?

7. (AMC 12B/2002) Juan mengelindingkan dadu bersisi delapan beraturan yang

diberi nomor mulai 1 sampai 8. Kemudian Amal mengelindingkan dadu bersisi enam beraturan. Berapa peluang bahwa hasil kali angka yang muncul dari kedua pengelindingan tersebut merupakan kelipatan 3?

8. (AMC 12B/2002) Misalkan titik P dipilih secara acak dalam daerah segiempat yang titik-titik sudutnya $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$. Jika Q(3, 1) dan O(0,0), Maka tentukan peluang bahwa titi P memenuhi kondisi $\overline{OP} < \overline{PQ}$?
9. (AMC 12A/2002) Segitiga ABC adalah segitiga siku-siku dengan sudut ACB adalah sudut siku-sikunya, $\angle ABC = 60^o$, & $AB = 10$. Titik P dipilih secara acak di dalam segitiga ABC, dan $\overline{BP}$ diperpanjang sehingga memotong $\overline{AC}$ di D. Berapakah peluang bahwa $BD > 5\sqrt{2}$?
10. (AMC 12A/2003) Tina memilih dua bilangan berbeda secara acak dari himpunan bilangan {1, 2, 3, 4, 5}, dan Sergio memilih sebuah bilangan secara acak dari himpunan {1, 2, 3, ..., 10}. Berapakah peluang bahwa bilangan yang dipilih Sergio lebih dari jumlah dua bilangan yang dipilih Tina?
11. (AMC 12/2001) Sebuah titik P dipilih secara acak dari bagian dalam segi lima yang titik-titik sudutnya $A(0,2), B(4,0), C(2\pi+1,0), D(2\pi+1,4), \& E(0,4)$. Berapakah peluang bahwa sudut APB adalah tumpul?
12. (AMC 12/2001) Sebuah kotak memuat tepat lima Chip (tiga merah dan 2 putih). Chip tersebut diambil secara acak satu demi satu tanpa dikembalikan sampai semua chip merah terambil atau sampai semua chip putih terambil. Berapa peluang bahwa chip terakhir yang terambil adalah putih?
13. (AMC 12B/2004) Setiap sisi kubus diwarnai Merah atau Biru, masing-masing dengan peluang 1/2. Warna setiap kubus ditentukan secara bebas. Berapakah peluang bahwa kubus yang diwarnai dapat diletakkan pada permukaan datar sedemikian hingga keempat sisi yang vertikal memiliki warna yang sama?
14. (AMC 12B/2006) Misalkan x dipilih secara acak dari interval $(0,1)$. Berapakah peluang bahwa $\lfloor \log 4x \rfloor - \lfloor \log x \rfloor = 0$? ($\lfloor x \rfloor$ *menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x*)

Peluang Khusus:

A. Distribusi Binomial

Jika suatu percobaan hanya menghasilkan dua kejadian yakni A dan bukan A (A^c) dimana $P(A) = \ell =$ peluang kejadian A dan $P(A^c) = 1 - \ell$.

Perhatikan bahwa jika pada tiap percobaan harga $\ell = P(A)$ nilainya konstant, maka percobaan yang berulang-ulang tersebut dinamakan ***percobaan Bernoulli***. Sekarang jika dilakukan percobaan bernoulli sebanyak N kali secara idenpenden, dimana Y di antaranya menghasilkan peristiwa A dan sisanya (N-Y) peristiwa A^c.

Jika $P(A) = \ell$ & $P(A^c) = 1 - \ell$, maka peluang terjadinya kejadian A sebanyak $Y = y$ kali diantara N, dihitung dengan rumus:

$$P(y) = P(Y = y) = \binom{N}{y} \ell^y \; (1-\ell)^{N-y}$$

dengan $y = 0, 1, 2, 3, \ldots, N \quad 0 < \ell < 1 \quad \& \binom{N}{y} = \frac{N!}{y!\,(N-y)!}$

Contoh 1:

Tentukan peluang untuk mendapatkan 6 muka G ketika melakukan undian dengan sebuah mata uang homogin sebanyak 10 kali.

Pembahasan:

$P(Y = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}2050$

dimana Y = jumlah muka G yang muncul

Contoh 2:

Dalam sebuah tes jawaban Benar-Salah yang terdiri dari 20 soal. Tentukan peluang Qonitah menjawab dengan benar tepat 80%.

Pembahasan:

Banyaknya soal dengan jawaban benar= 80% . 20 soal= 16 soal

Peluang untuk menjawab benar adalah ½ dan

Peluang untuk menjawab salah adalah 1 – ½ = ½ . Sehingga:

$P(Y = 16) = \binom{20}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^{16} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0046$

dimana Y = banyaknya jawaban benar

Contoh 3:

Dalam sebuah tes terdiri dari 20 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan jawaban. Dimana masing-masing soal tepat dijawab secara acak dan tepat memiliki 1 jawaban benar. Tentukan peluang Qonitah menjawab dengan benar tepat 80%.

Pembahasan:

Banyaknya soal dengan jawaban benar= 80% . 20 soal= 16 soal

Peluang untuk menjawab benar adalah $\frac{1}{4}$ dan

Peluang untuk menjawab salah adalah $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Sehingga:

$P(Y = 16) = \binom{20}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0{,}00000036$

dimana Y = banyaknya jawaban benar

LATIHAN A. P

1. Dalam pelemparan 10 buah dadu homogin sekaligus. Berapa peluang muncul mata dadu 6 sebanyak 8 buah?
2. Sepuluh persen dari suatu benda tergolong ke dalam kategori A. Sebuah sampel sebanyak 30 buah telah diambil secara acak. Berapa peluang sampel tersebut akan berisikan benda dengan kategori A:
   a. semuanya
   b. sebuah
   c. dua buah
   d. paling sedikit sebuah
   e. paling banyak dua buah

3. Tiap soal ujian pilihan ganda terdiri dari pilihan benar-salah, semuanya ada 20 soal. Tentukan peluang menerka secara benar paling sedikit 17 soal.
4. Dalam sebuah tes terdiri dari 10 soal benar-salah:

a. Berapakah peluang seorang siswa menebak dengan benar semua soal?
b. Berapakah peluang seorang siswa menebak dengan benar tepat 8 soal?

5. Seorang pemain basket melakukan 10 kali tembakan dan peluang tembakan pemain tersebut masuk ring sebesar 0,5 untuk tiap-tiap tembakannya.
   a. Berapakah peluang pemain basket tersebut bisa memasukan ke dalam ring tepat 8 kali tembakan.
   b. Berapakah peluang pemain basket tersebut bisa memasukan ke dalam ring tepat 8 kali tembakan jika peluang untuk sukses memasukan ke dalam ring adalah 0,6.
6. Sebuah kotak berisi 30 jelly hijau dan 20 jelly orange. Andaikan 10 jeli orange dipilih secara acak dari kotak tersebut. Tentukan peluang mendapatkan tepat 4 jelly orange jika pengambilan tersebut dikembalikan sebelum pengambilan berikutnya.
7. (OSK, 2012/Tipe 1, 2, 3) Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?

B. Distribusi Multinomial

Perluasan dari distribusi binomial adalah ***distribusi multinomial***. Misalkan suatu percobaan menghasilkan kejadian-kejadian $A_1, A_2, \dots, A_n$ dengan $P(A_1) = \ell_1, P(A_2) = \ell_2, \ \dots \ , P(A_n) = \ell_n$

Jika percobaan tersebut dilakukan sebanyak N kali, maka peluang akan terdapat x_1 kejadian A_1, x_2 kejadian A_2, ... , x_n kejadian A_n ditentukan dengan rumus:

$$P(x_1, x_2, .., x_n) = \frac{N!}{x_1!\, x_2! \dots x_n!} \ell_1^{x_1} \ell_2^{x_2} \dots \ell_n^{x_n}$$

dengan $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = N$ dan $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n = 1$, sedangkan $0 < \ell_i < 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

Contoh 1:

Dalam undian dengan sebuah dadu sebanyak 12 kali, maka peluang terdapat mata dadu 1, mata dadu 2, ..., mata dadu 6 masing-masing tepat dua kali sama dengan ...

Pembahasan:

$$P(x_1 = x_2 = \cdots = x_6 = 2) = \frac{12!}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$= 0{,}0034$$

Contoh 2:

Sebuah kotak berisi 3 barang yang dihasilkan oleh mesin A, 4 oleh mesin B, dan 5 oleh mesin C. Kecuali dikategorikan berdasarkan mesin, identitas lainnya mengenai barang tersebut sama. Sebuah barang diambil secara acak dari kotak itu, identitas mesinnya dilihat, lalu disimpan kembali ke dalam kotak. Tentukan peluang diantara 6 barang yang diambil dengan jalan demikian terdapat 1 dari

mesin A, 2 dari mesin B dan 3 dari mesin C.

Pembahasan:

Jelas bahwa $P(A)=\frac{3}{12},\ P(B)=\frac{4}{12},\ \&\ \ P(C)=5/12$

$$P(A=1,B=2,C=3)=\frac{6!}{1!\,2!\,3!}\left(\frac{3}{12}\right)^1\left(\frac{4}{12}\right)^2\left(\frac{5}{12}\right)^3=0{,}1206$$

LATIHAN B. P

1. Menurut kriteria tertentu, misalkan di masyarakat terdapat 30% keluarga golongan rendah, 50% golongan menengah dan 20% golongan tinggi. Sebuah sampel acak terdiri dari 20 keluarga telah diambil. Tentukan peluangnya akan terdapat 6 golongan rendah, 10 golongan rendah, dan 4 golongan tinggi
2. Dalam ujian matematika telah diperoleh keterangan berikut:
   P(mendapat nilai 0 – 4)= 0, 23
   P(mendapat nilai 5 – 6)= 0, 42
   P(mendapat nilai 7 – 8)=0, 27
   P(mendapat nilai 9 – 10)=0, 08
   Ada 10 mahasiswa yang mengambil ujian. Bagaimana peluanya ke 10 mahasiswa mendapatkan nilai 9 – 10?

C. Distribusi Hipergeometrik

Misalkan ada suatu populasi dengan ukuran berhingga, katakan N dan ada M item dengan kategori 1 dan sisanya N – M item berkategori 2. Andaikan n item diambil tanpa pengembalian dan Y menyatakan banyaknya item tipe 1 yang diambil, maka

$$P(y)=\frac{\binom{M}{y}\binom{N-M}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

Contoh 1:

Dalam suatu kotak berisi 10 bola hitam dan 20 bola putih. Dari kotak tersebut diambil 25 bola tanpa pengembalian. Tentukan peluang mendapatkan tepat 8 bola hitam.

Pembahasan:

$$P(8;25,10,30)=\frac{\binom{10}{8}\binom{20}{17}}{\binom{30}{25}}$$

Contoh 2:

Sekelompok manusia terdiri atas 50 orang dan 3 di antaranya lahir pada tanggal 1 Januari. Secara acak diambil 5 orang. Berapa peluangnya di antara 5 orang tadi:

a. tidak terdapat yang lahir tanggal 1 Januari
b. terdapat tidak lebih dari seorang yang lahir pada tanggal 1 Januari?

Pembahasan:

a. Misalkan y = banyak orang diantara n = 5 orang yang lahir pada tanggal 1 Januari. Maka dengan N = 50, M = 3:

$$P(0;5;3;50)=\frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}}=0{,}724$$

b. Tidak lebih dari seorang yang lahir pada 1 Januari, berarti y = 0 atau y = 1.
Untuk

$$P(0;5;3;50)=\frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}}=0{,}724$$

Sedangkan:

$$P(1;5;3;50)=\frac{\binom{3}{1}\binom{47}{4}}{\binom{50}{5}}=0{,}253$$

Jadi $P(y\leq 1)=0{,}724+0{,}253=0{,}977.$

LATIHAN C. P

1. Terdapat 200 pasien di antaranya 10 menderita tekanan darah tinggi. Secarak acak diambil 10 pasien. Hitung berapa peluangnya akan terdapat paling banyak dua pasien dari yang 10 ini menderita tekanan darah tinggi.
2. Suatu perusahaan memiliki 10 pekerja, dimana tiga diantaranya pria. Manajer memilih secara acak 4 orang yang akan dikirim ke suatu diklat.
   a. Berapakah peluang bahwa yang dikirim jumlah pria dan wanitanya sama?
   b. Berapakah peluang bahwa jumlah pria yang dikirim lebih banyak?
3. Lima kartu diambil tanpa pengembalian dari seperangkat kartu bridge (52 kartu). Tentukan peluang masing-masing kejadian berikut:
   a. mendapatkan tepat dua As
   b. mendapatkan tepat dua king
   c. mendapatkan paling banyak dua As
   d. mendapatkan sedikitnya dua As
4. Dalam kotak terdapat 50 telur ayam dimana 42 diantara merupakan telur baik dan sisanya rusak. Pengawas ayam mengambil 5 telur secara acak tanpa pengembalian.
   a. Berapakah peluang mendapatkan tepat tiga telur baik?
   b. Berapakah peluang mendapatkan paling banyak tiga telur baik?

3. Prinsip sangkar merpati (pigeon-hole Priciple)
Prinsip sangkar merpati menyatakan bahwa jika terdapat m barang yang didistribusikan ke dalam n buah kotak, maka sekitinya satu kotak akan menerima lebih dari satu barang (dimana m > n). Untuk menghemat penulisan, maka pada tulisan berikut prinsip ini kita singkat dengan PHP.

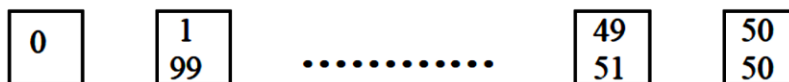
Contoh 1:
Contoh sederhana dari Prinsip ini adalah sebagai berikut:
- ✓ Jika ada 6 burung yang ditempatkan dalam 5 rumah, maka salah satu rumah pasti ditempati oleh lebih dari satu burung.
- ✓ Jika terdapat 13 orang, maka sedikitnya ada dua orang merayakan ulang tahun pada bulan yang sama.

- ✓ Dalam satu kelas yang terdiri lebih dari 32 murid, maka ada murid yang ulang tahun dengan tanggal sama.
- ✓ Di Jakarta ada sedikitnya dua orang yang mempunyai tinggi sama (dalam cm)

Contoh 2:
Tentukan jumlah minimal anggota yang harus diambil dari himpunan $S = \{1, 2, 3, \ldots 9\}$ sehingga dapat dipastikan dua diantara bilangan tersebut jumlahnya 10.
Pembahasan:
Partisi himpunan S menjadi lima subhimpunan dimana ini sebagai sarang merpati, yaitu: $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$. Jadi menurut PHP kita harus memilih 6 (merpati) anggota agar dapat dipastikan bahwa jumlah dua diantara enam bilangan tersebut jumlahnya 10.

Contoh 3:
Misalkan A adalah himpunan dua puluh bilangan asli yang dipilih dari barisan matematika 1, 4, 7, 10, ...,100. Buktikan bahwa ada dua bilangan asli berbeda dalam A yang jumlahnya 104.
Pembahasan:
Kita partisi ketigapuluh emapt anggota dari deret ini menjadi delapan belas himpunan, yakni $\{1\}, \{52\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \{10, 94\}, \ldots, \{49, 55\}$. Karena kita memilih dua puluh bilangan asli dan kita mempunyai delapan belas himpunan, maka berdasarkan PHP, terdapat dua bilangan yang merupakan anggota dari himpunan yang sama. Perhatikan bahwa jumlah keduanya adalah 104.

Contoh 4:
Diberikan 52 bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa kita dapat memilih dua di antara bilangan-bilangan ini sehingga jumlah atau selisihnya habis dibagi 100.
Pembahasan:
Perhatikan gambar di bawah ini:

0	1 99	....	49 51	50 50

Angka dalam kotak merepresentasikan sisa bagi suatu bilangan dengan 100. Terdapat 51 kotak dan tepat 52 bilangan yang akan dimasukkan ke dalam kotak. Berdasarkan PHP maka akan terdapat kotak yang berisi lebih dari satu benda. Misalkan kotak ke-I berisi lebih dari satu bilangan. Maka jika dua bilangan pada kotak tersebut memiliki sisa bagi yang sama, selisih dari kedua bilangan tersebut akan habis dibagi 100. Sedangkan jika sisa baginya berbeda maka jumlah dari kedua bilangan tersebut akan habis dibagi 100.

Contoh 5:
Ada 33 siswa dalam suatu kelas dan jumlah usia mereka 430 tahun. Apakah benar bahwa kita dapat menemukan 20 siswa dalam kelas tersebut sedemikian sehingga jumlah usianya lebih dari 260?
Pembahasan:
Misalkan usia-usia 33 siswa dalam suatu kelas $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{33}$ dan asumsikan $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{33}$. Sekarang anggaplah untuk saat ini yang terbesar dari 20 siswa tersebut, $a_{14}, a_{15}, \ldots, a_{33}$ memiliki jumlah paling besar 260. Karena rata-rata usia dari 20 siswa adalah 13, hal ini berarti $a_{14} \leq 13$. Ini berarti masing-masing dari bilangan $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ adalah paling besar 14. Jumlahkan semua bilangan, kita perolah:

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{33} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} + 260 \leq 169 + 260 = 429$(Kontradiksi).

Bentuk Umum dari PHP

Jika ada n sangkar merpati ditempati kn + 1 atau lebih merpati, dimana k bilangan bulat positif, maka ada sedikitnya satu lubang yang ditempati oleh k+1 atau lebih merpati.

Contoh 6:

Tentukan banyaknya minimal siswa dalam suatu kelas sehingga dapat dipastikan bahwa tiga diantara mereka mempunyai bulan lahir yang sama.

Pembahasan:

Disini n=12 (Sangkar Merpati) dan k+1=3 sehingga kita peroleh k=2. Jadi jumlah minimal siswa agar memenuhi kondisi pada soal kn+1=25 siswa.

Jika f merupakan sebuah fungsi dari suatu himpunan terhingga X ke suatu himpunan terhingga Y dan |X| > |Y |, maka $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1,\ x_2$ anggota X, dimana $x_1 \neq x_2$.

Untuk membuktikan Prinsip Pigeonhole Bentuk di atas ini kita bisa mengasumsikan X sebagai himpunan merpati dan Y sebagai himpunan rumah merpati. Selanjutkan kita memasangkan merpati x ke rumah merpati f(x). Karena jumlah merpati lebih banyak dari rumahnya, maka terdapat paling sedikit dua merpati, $x_1,\ x_2$ anggota X yang dipasangkan ke rumah merpati yang sama, yaitu $f(x_1) = f(x_2)$ untuk beberapa $x_1,\ x_2$ anggota X, dimana $x_1 \neq x_2$.

Contoh 7:

Dalam membuat kode matakuliah untuk matakuliah-matakuliah bidang studi informatika adalah dengan cara menambahkan tiga angka pada huruf TIK. Terdapat 51 matakuliah yang harus diberi kode dan tiga angka yang harus ditambahkan pada huruf TIK harus berkisar antara 101 sampai dengan 200. Tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit dua matakuliah yang diberi kode dengan angka berurutan.

Pembahasan:

Misalkan angka-angka yang dipilih adalah $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$.

Jika angka-angka di atas digunakan bersama-sama dengan $a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{51} + 1$.

maka terdapat 102 nomor yang merentang antara 101 sampai dengan 201. Karena ada 100 nomor yang disediakan (yaitu 101 sampai dengan 200) dan ada 102 nomor yang akan digunakan, maka menurut Prinsip Pigeonhole Bentuk Kedua terdapat paling sedikit dua nomor yang sama. Nomor $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ dan
$a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{51} + 1$ semuanya berbeda. Sehingga kita mempunyai $a_i = a_j + 1$
Dengan demikian kode a_i berurutan dengan kode a_j .

Jika N obyek ditempatkan ke dalam k kotak, maka terdapat paling sedikit satu kotak yang memuat sedikitnya $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ obyek.

Ket:$\lceil x \rceil$: bilangan bulat terkecil yang lebih dari atau sama dengan x

Contoh 8:

- ✓ Di dalam kelas dengan 60 mahasiswa, terdapat paling sedikit 12 mahasiswa akan mendapat nilai yang sama (A, B, C, D, atau E).

- ✓ Di dalam kelas dengan 61 mahasiswa, paling sedikit 13 mahasiswa akan memperoleh nilai yang sama (A, B, C, D, atau E).

Contoh 9:

Dalam matakuliah Matematika Diskrit diberikan tugas kelompok yang akan dibagi menjadi enam kelompok. Jika terdapat 62 mahasiswa yang menempuh mata kuliah tersebut, tunjukkan bahwa terdapat paling sedikit ada 11 mahasiswa yang menjadi anggota suatu kelompok yang sama!

Pembahasan:

Kita asumsikan mahasiswa tersebut sebagai anggota dari himpunan daerah asal X dan kelompoknya sebagai anggota daerah kawan Y . Karena |X| = 62, |Y | = 6 dan $\left\lceil \frac{62}{6} \right\rceil = 11$. Maka dengan menggunakan PHP, terdapat paling sedikit 11 anggota X yang dipasangkan dengan suatu anggota Y yang sama. Dengan demikian terdapat paling sedikit ada 11 mahasiswa yang menjadi anggota suatu kelompok yang sama.

LATIHAN 3

1. Jika dari barisan bilangan 1,2,3,4,5,...,400 diambil 201 bilangan, maka buktikanlah bahwa dari 201 bilangan tersebut paling tidak ada dua bilangan dimana bilangan yang satu yang membagi bilangan yang lain.
2. Jika dari barisan bilangan 1,2,3,4,5,...,400 diambil 201 bilangan, maka buktikanlah bahwa dari 201 bilangan tersebut paling tidak ada dua bilangan yang koprima (faktor pembagi terbesarnya 1).
3. Diberikan barisan bilangan dari 1,2,3,...,100. Jika dari barisan bilangan tersebut diambil 51 bilangan, buktikan bahwa paling tidak ada 2 bilangan yang selisihnya 50.
4. Buktikan bahwa diantara sebarang 51 bilangan bulat positif kurang dari 100, ada pasangan yang jumlahnya 100.
5. Lima belas anak secara bersama-sama mengumpulkan 100 kacang. Buktikan bahwa ada beberapa pasang anak yang mengumpulkan kacang dalam jumlah yang sama.
6. Misalkan kita mengambil kartu berurutan dan tanpa dikembalikan dari sejumlah 52 kartu. Diperlukan berapa kali pengambilan untuk memastikan kita mendapatkan dua kartu yang angkanya sama?
7. (AHSME/1994) Satu disket ditandai ”1”, dua disket ditandai dengan ”2”, tiga disket ditandai dengan ”3”, ..., dan lima puluh disket ditandai dengan ”50”. $1+2+3+\ldots+50=1.275$ disket yang telah ditandai ini dimasukkan ke dalam kotak. Kemudian disket diambil dari kotak secara acak tanpa dikembalikan. Berapa jumlah disket minimum yang harus diambil untuk memastikan telah terambil setidaknya sepuluh disket dengan tanda yang sama?

8. Tentukan banyaknya bilangan bulat n yang diambil dari sekumpulan himpunan $S = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ sedemikian sehingga: (a) jumlah dua dari n bilangan bulat adalah genap (b) Selisih dua dari n bilangan bulat adalah 5.
9. Tentukan jumlah minimal siswa yang dibutuhkan sehingga dapat dipastikan lima diantara mereka berada dalam kelas yang sama (Jenis kelasnya ada: TK, SD, SMP, SMA, SMK)
10. Jika ada 101 surat yang akan dimasukkan ke dalam 50 kotak pos, buktikan bahwa ada sedikitnya satu kotak pos berisi sekurangkurangnya 3 surat.
11. Jika terdapat $n^2 + 1$ titik yang terletak di dalam sebuah persegi dengan panjang sisi n, buktikan bahwa ada sekurang-kurangnya 2 titik yang memiliki jarak tidak lebih dari $\sqrt{2}$ satuan.
12. Buktikan bahwa di antara 7 bilangan bulat, pasti ada sekurang-kurangnya sepasang bilangan yang selisihnya habis dibagi 6.
13. Tunjukkan bahwa di antara tujuh bilangan bulat positif berbeda yang tidak lebih dari 126, kita selalu dapat menemukan dua diantaranya, katakanlah x dan y dengan y>x sedemikian sehingga $x < y \le 2x$.
14. Buktikan bahwa bagaimanapun lima puluh bilangan dipilih dari $\{1, 2, 3, ..., 100\}$, pasti terdapat dua bilangan yang selisihnya 10.

15. Diketahui A suatu himpunan dengan anggota sepuluh bilangan asli yang bernilai diantara 1 dan 9. Buktikan bahwa terdapat dua subhimpunan yang irisannya bukan himpunan kosong dimana jumlah anggota-anggota kedua subhimpunan adalah sama.
16. (OSP 2004) Berapakah banyak minimal titik yang harus diambil dari sebuah persegi dengan panjang sisi 2, agar dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya tidak lebih dari $\frac{1}{2}\sqrt{2}$?
17. Apakah benar bahwa dari sebarang 30 bilangan asli berbeda, yang tidak lebih dari 50 kita dapat memilih pasangan bilangan sedemikian sehingga satu bilangan dalam pasangan tersebut besarnya dua kali dari bilangan yang lainnya.

4. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip inklusi-eksklusi yang paling sederhana telah kita pelajari pada saat SMP yaitu saat kita mempelajari prinsip menambah kardinalitas dari dua himpunan. Jika diketahui dua himpunan A dan B, maka banyaknya anggota dari $A \cup B$ adalah

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Perhatikan jika himpunannya ada 3, yaitu himpunan A, B, dan C, maka banyaknya anggota $A \cup B \cup C$ adalah

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Jika himpunannya ada n himpunan, maka

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \ne j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \ne j \ne k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - .... + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^{n} A_i \right|$$

Dalam perhitungan soal-soal olimpiade seringkali kita perlu menghitung jumlah anggota komplemen suatu himpunan. Jika A suatu subhimpunan dari S, maka

$A^C = \{x \in S \mid x \notin A\}$ disebut komplemen A. Perhatikan bahwa $|S| = |A| + |A^c| \Leftrightarrow |A^c| = |S| - |A|$. Karena $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, maka kita peroleh:

$|A^c \cap B^c| = |S| - |A \cup B| = |S| - [\, |A| + |B| - |A \cap B| \,]$

Dengan cara yang sama, maka kita peroleh bentuk:

$|A^c \cap B^c \cap C^c| = |S| - |A \cup B \cup C|$.

Contoh 1:

Berapa banyaknya bilangan bulat mulai 1 s.d. 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

Pembahasan:

Misalkan

$S = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

A : Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3

B : Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 5

$A \cap B$: Himpunan bilangan bulat yang habis dibagi 3 dan 5 (yaitu himpunan bilangan bulat yang habis dibagi KPK (3, 5) = 15)

yang ditanyakan adalah $|A \cap B|$?

$|A| = \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33,\ |B| = \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20,\ |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor = 6$

(dimana $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x).

Sehingga, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ = 33 + 20 - 6 = 47$

Jadi, ada 47 buah bilangan mulai 1 s.d. 100 yang habis dibagi 3 atau 5.

Contoh 2:

Dari semua 200 orang siswa disuatu SMA X, terdapat 95 siswa suku olahraga bulutangkis, 85 siswa suka olahraga sepakbola, dan 30 siswa suka olahraga keduanya. Banyaknya siswa yang tidak suka olahraga keduanya?

Pembahasan:

Misalkan A adalah himpunan siswa yang suka olahraga bulutangkis

B adalah himpunan siswa yang suka olahraga sepakbola, maka

$|A| = 95, |B| = 85,\ \&\ |A \cap B| = 30,$

Sehingga: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 95 + 85 - 30 = 150.$

Jadi, banyaknya siswa SMA X yang tidak suka bulutangkis maupun sepakbola adalah 200-150= 50 orang.

Contoh 3:

Sebuah TV Contest mensurvey 100 orang tentang kesukaan melihat tayangan A, B, dan C. Dari hasil survey diperoleh data: 20 orang suka A, 16 orang suka B, 8 orang suka A dan B, 5 orang suka A dan C, 4 orang suka B dan C, serta 2 orang suka melihat ketiganya. Berapa banyak orang yang tidak suka melihat ketiga tayangan tersebut?

Pembahasan:

Kita akan menghitung $|A^c \cap B^c \cap C^c|$. Dengan menerapkan prinsip inklusi-eksklusi untuk komplemen suatu himpunan, kita peroleh bentuk

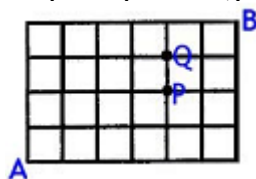
$\left|A^c \cap B^c \cap C^c\right| = |S| - |A \cup B \cup C|$

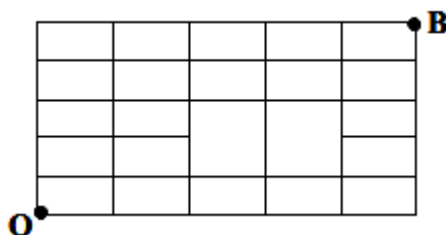
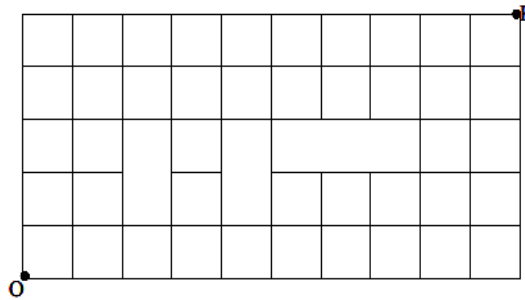
$= |S| - \left[|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\right]$

$= 100 - [20 + 16 + 14 - 8 - 5 - 4 + 2] = 65$

Jadi, ada 65 orang yang tidak suka ketiga tayangan A, B, dan C.

LATIHAN 4

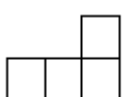
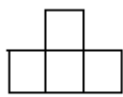
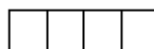
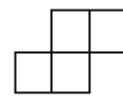
1. Dalam suatu kelas, 10 siswa mengikuti ekstra komputer, 6 siswa mengikuti matematika, dan 3 siswa mengikuti ekstra komputer & matematika. Berapa banyak siswa yang mengikuti sedikitnya satu ekstra?
2. Andaikan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adalah himpunan yang saling lepas dan $n(A_i) = i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Tentukan: a) $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$ b) $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$
3. Andaikan A dan B suatu himpunan sedemikian sehingga $|A| = 10, |B| = 7, |A \cup B| = 11.$ Berapakah $|A \cap B|$?
4. Andaikan A dan B subset dari U. Tentukan $|U - (A \cup B)|$ jika $|A| = 3,$ $|B| = 3,$ $|A \cap B| = 1$, dan $|U| = 10.$
5. Dari 20 orang pemain olahraga, 10 orang bermain basball, 5 orang bermain bola basket, dan 2 orang bermain keduanya. Berapa banyak orang yang tidak bermain keduannya?
6. Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 7 atau 11?
7. Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 1000 yang habis dibagi oleh 5, 7, atau 11?
8. Berapa banyak bilangan bulat x dimana $1 \le x \le 100$ yang habis dibagi 2, 5, atau 12? Tidak habis dibagi 3, 7, dan 11?
9. Berapa banyaknya solusi bilangan bulat untuk persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 24$ dengan $1 \le x_1 \le 5, 12 \le x_2 \le 18, -1 \le x_3 \le 12$? (Gunakan prinsip Inklusi-Eksklusi)
10. Sebuah benda akan digerakkan dari titik A(0,0) ke titik B(6,4) namun benda tersebut hanya dapat bergerak ke atas ke kanan melalui titik-titik koordinat.

    a. Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B ?
    b. Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B namun harus melalui titik P(4,2) ?
    c. Ada berapa cara benda tersebut bergerak dari titik A hingga mencapai titik B namun harus melalui ruas PQ dengan Q(4,3) ?

11. Diketahui 5 x 5 grid persegi. Carilah banyaknya jalan terpendek dari O ke B?

12. Diketahui 10 x 5 grid persegi panjang. Carilah banyaknya jalan terpendek dari O ke P?

13. (OSP 2012) Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi $n \leq 2012$ dan meruapakan bilangan kuadrat sempurna atau kubik atau pangkat 4 atau pangkat 5 atau ... atau pangkat 10, ada sebanyak ...
14. (OSK Tipe 3/2012) Disuatu papan tulis tertera bilangan dari 1 sampai dengan 100. Adi diminta untuk menghapus bilangan kelipatan dua, Upik diminta menghapus bilangan kelipatan tiga. p adalah banyaknya bilangan yang masih tertera di papan tulis. Jumlah digit dari p adalah ...
15. (OSK 2003) Sebuah kelas terdiri dari 40 siswa. Diantaranya, 20 siswa menyukai pelajaran Matematika, 15 orang menyukai pelajaran Biologi, 15 orang menyukai pelajaran Bahasa Inggris dan lima orang menyukai ketiganya. Banyaknya siswa yang menyukai sedikitnya satu dari ketiga pelajaran tersebut adalah ?
16. (OSP 2008) misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X. Jika $|A \cup B| = 10 \; \& \; |A| = 4$, nilai yang mungkin untuk $|B|$ adalah ...
17. (AMC 12/2001) Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 2001 yang merupakan kelipatan 3 atau 4 tetapi bukan kelipatan 5?
18. (AHSME 1966) Banyaknya bilangan bulat positif kurang dari 1000 yang tidak dapat dibagi oleh 5 maupun 7 adalah ...
19. (AHSME 1981) Berapa banyak dari 100 bilangan bulat positif yang pertama yang dapat dibagi oleh ke-empat bilangan 2,3,4,5?
20. Jumlah semua bilangan bulat positif yang kurang dari 2010 dan tidak habis dibagi 3 adalah ...

5. Prinsip Paritas

Prinsip ini digunakan untuk mengeliminasi kemungkinan-kemungkinan tertentu dengan cara memperhatikan dua masalah saja, misalnya ganjil genap atau hitam putih.

Salah satu aplikasi prinsip ini adalah menentukan banyaknya titik latis. **Titik Latis (m,n) pada suatu bidang adalah titik-titik dengan koordinat bilangan bulat.**

Aplikasi lain yang menggunakan prinsip paritas adalah soal-soal yang berkaitan dengan pengubinan dengan tetromino. Berikut bentuk-bentuk tetromino diantaranya:

Contoh 1:
Lima titik latis dipilih secara acak. Buktikan bahwa kita selalu bisa memilih dua titik sehingga titik tengah yang menghubungkan keduanya juga merupakan titik latis.
Pembahasan:
Perhatikan bahwa terdapat empat pola paritas: (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil,ganjil), dan (ganjil, genap). Berdasarkan PHP diantara lima titik latis pasti terdapat dua titik yang memiliki paritas sama. Pilih dua jelas bahwa titik tengahnya merupakan bilangan bulat juga.

Contoh 2:
Tunjukkan bahwa sebuah papan catur 8 x 8 tidak bisa ditutupi dengan 15 Straight-terromini dan sebuah L-tertromino.
Pembahasan:
Warnai baris 1, 3, 5, 7 dengan warna hitam dan baris 2, 4, 6, 8 dengan warna putih. Straight-tetromino akan selalu menutupi persegi putih dengan jumlah genap, sedangkan L-tetromino akan selalu menutupi dengan jumlah ganjil. Jika dimungkinkan

ada pengubinan yang diminta, maka kita akan menutupi ubin warna putih dengan jumlah ganjil, kontradiksi.

Contoh 3:
Misal $a_1, a_2, ..., a_n$ adalah sebarang permutasi dari 1, 2, ..., n. Jika n adalah ganjil, buktikan bahwa $(a_1-1)(a_2-2)...(a_n-n)$ adalah genap.
Pembahasan:
Andaikan sebaliknya. Maka setiap faktor $(a_i - i)$ adalah ganjil. Misalkan $n = 2k+1$ untuk suatu k bilangan bulat. Maka banyak i dengan paritas genap adalah k dan banyak i dengan paritas ganjil adalah k+1. Agar $(a_i - i)$ ganjil maka a_i dan i harus berbeda paritas. (Kontradiksi)

Contoh 4:
Jika p dan q adalah dua bilangan prima yang memenuhi $p + q = 2005$. Jika $p > q$, tentukan $p - q$.
Pembahasan:
Metode menyelesaikan soal ini menggunakan sedikit pengaruh dari prinsip paritas.

2005 (*ganjil*) = p (*ganjil*) + q (*genap*)

Bilangan prima genap hanya bilangan 2. Jadi, q=2.
Kemudian substitusikan q ke persamaan didapat p = 2003.

Jadi, p – q = 2001.

Contoh 5:
Tentukan bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan penjumlahan dua bilangan prima.
Pembahasan:
Bilangan prima selalu ganjil, kecuali 2. Misalkan dua bilangan prima yang dimaksud dalam soal adalah x dan y, maka paritas x dan paritas y berbeda (bilangan ganjil diperoleh dari bilangan ganjil tambah bilangan genap). Atau tanpa mengurangi keumuman, x genap dan y ganjil. X sudah pasti 2. Mudah dicek bahwa y=71. Sehingga bilangan prima yang ditanyakan dalam soal adalah 71+2=73

Contoh 6:
Tunjukan bahwa banyaknya peserta yang melakukan jabat tangan sebanyak k bilangan ganjil adalah genap.
Pembahasan:
Misalkan T, total banyaknya jabat tangan yang dilakukan peserta, serta d(i) adalah banyaknya jabat tangan yang dilakukan oleh peserta ke-i. Dari sana maka diketahui bahwa;

$$2T = \sum_{i=1}^{n} d(i)$$

Sehingga $\sum_{i=1}^{n} d(i)$ adalah bilangan genap. Akibatnya karena

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = \sum_{d(i)\ genap} d(i) + \sum_{d(i)\ ganjil} d(i)$$

Maka $\sum_{i=1}^{n} d(i)$ adalah bilangan genap juga.
Jadi terbukti bahwa banyaknya d(i) yang ganjil harus genap.

LATIHAN 5

1. (OSK 2005) Titik A(a, b) disebut titik letis jika a dan b keduanya adalah bilangan bulat. Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah ...
2. (OSP 2007) Misalkan V adalah himpunan titik-titik pada bidang dengan koordinat bilangan bulat dan X adalah himpunan titik tengah dari semua pasangan titik pada himpunan V. Untuk memastikan bahwa ada angota X yang juga memiliki koordinat bilangan bulat, banyak anggota V paling sedikit harus · · · · ·
3. (OSP 2010) Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah · · ·
4. Apakah papan catur berukuran 10 x 10 kotak dapat ditutup oleh 25 T-tetromino?
5. Apakah papan catur berukuran 8 x 8 kotak dapat ditutup oleh 16 T-tetromino?
6. Diberikan 9 bilangan asli sebarang yang faktor primanya anggota dari himpunan {3,7,11}. Buktikan bahwa terdapat setidaknya dua bilangan sehingga hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat.
7. Bilangan 1, 2, 3, .., 10 dituliskan dalam suatu baris. Tunjukkan bahwa bagaimanapun tanda penjumlahan/pengurangan digunakan di depan masing-masing bilangan, maka jumlahnya tidak akan pernah nol.
8. (OSK, Tipe 1/2012) Banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi $(n-1)(n-3)(n-5)\ ....(n-2013) = n(n+2)(n+4)...(n+2012)$ adalah ....

6. Fungsi Pembangkit

Pendahuluan

Fungsi pembangkit adalah alat yang penting dalam menyelesaikan masalah membilang, yaitu mencari banyaknya suatu pilihan dalam mengambil obyek, atau banyaknya cara dalam melakukan kegiatan tertentu.

Contoh 1:
Tentukan banyaknya solusi bilangan bulat untuk $X_1 + X_2 = r$ dengan $0 \le X_1 \le 1$ dan

$1 \leq X_2 \leq 2$.

Pembahasan:

Perhatikan tabel berikut:

X_1	X_2	Jmlh
0	1	1
0	2	2
1	1	2
1	2	3

Jadi, ada satu cara mendapatkan jumlah 1
, ada dua cara mendapatkan jumlah 2
, ada satu cara mendapatkan jumlah 3

Contoh 2:

Hasil dari $(x^0 + x^1)\,(x^1 + x^2)$ adalah ...

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}(x^0 + x^1)\,(x^1 + x^2) &= x^0(x^1 + x^2) + x^1(x^1 + x^2)\\ &= x^0x^1 + x^0x^2 + x^1x^1 + x^1x^2\\ &= x^1 + x^2 + x^2 + x^3\\ &= x^1 + 2\,x^2 + \;x^3\end{aligned}$$

Dari contoh 1 dan 2, ada kesamaan perfoma:

- ✓ Eksponen pertama pada contoh 2, berkoresponden dengan kemungkinan nilai untuk X_1
- ✓ Eksponen kedua pada contoh 2, berkoresponden dengan kemungkinan nilai untuk X_2
- ✓ Perhatikan hasil akhir pada contoh 2,
  x^1 berkoresponden dengan ***ada satu cara mendapatkan jumlah 1***
  $2x^2$ berkoresponden dengan ***ada dua cara mendapatkan jumlah 2***
  x^3 berkoresponden dengan ***ada satu cara mendapatkan jumlah 3***

Dari dua contoh di atas maka dihasilkan definisi-definisi berikut:

Definisi

a) **Deret berpangkat** adalah ekspresi dalam bentuk $(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots)$. Koefisien ke-i adalah a_i dan khususnya a_0 adalah koefisien ke-0 (konstanta)

b) **Perkalian** didefinisikan dengan menentukan koefisien dari x^r dalam $(a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots)\;(b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots)$ sama dengan $a_0b_r + a_1b_{r-1} + \cdots + a_rb_0$. Definisi ini sering disebut ***Identitas Konvolusi***.

c) **Penjumlahan** didefinisikan dengan menentukan koefisien dari x^r dalam $(a_0x^0 + a_1x^1 + \cdots)\; + \;(b_0x^0 + b_1x^1 + \cdots)$ sama dengan $a_r + b_r$.

Definisi

Suatu fungsi

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\sim} a_n\,x^n$$

disebut fungsi pembangkit biasa dari barisan tak terhingga bilangan real $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Dari fungsi pembangkit biasa, jika $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = 0$ maka fungsi pembangkitnya menjadi:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$$

Contoh 1:

Untuk sebarang n anggota bilangan bulat positif,

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r\, (1)^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n$$

Dengan demikian $f(x) = (1+x)^n$ adalah fungsi pembangkit dari barisan $\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}, 0, 0, 0,\ \dots$

Contoh 2:

- ✓ Fungsi pembangkit dari barisan 3, 3, 3, 3, ... adalah $3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \cdots$
- ✓ Fungsi pembangkit dari barisan 3^0, $3^1, 3^2, \dots$ adalah $3^0 + 3^1x + 3^2x^2 + \cdots$

LATIHAN 6A

1. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan 2, 2, 2, 2, ...
2. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...
3. Berapakah koefisien x^5 dalam penjabaran $(1 + x + x^2 + \cdots)\,(1 + x + x^2 + \cdots)$?
4. Periksalah apakah benar bahwa $1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots)$
5. Tentukan fungsi pembangkit kasus berikut:
   a. Banyaknya barisan r-digit biner
   b. Banyaknya r-multisets dari $\{x_1, x_2,\ \dots,\ x_n\}$

Pemodelan Masalah dengan Fungsi Pembangkit

Dalam bagian ini, kita akan fokus pada masalah menentukan fungsi pembangkit dari suatu masalah. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut:

Contoh 1:

Tentukan fungsi pembangkit untuk banyaknya solusi bulat untuk $X_1 + X_2 + X_3 = r$ dengan $X_i \geq 0$.

Pembahasan:

Fungsi pembangkit kasus ini adalah $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)^3$.

Contoh 2:

Tentukan fungsi pembangkit untuk banyaknya solusi bulat untuk $X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 4X_4 = r$ dengan $X_i \geq 0$.

Pembahasan:

Misalkan $Z_i = iX_i$, maka kita peroleh $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = r,\ \ Z_i = 0, i, 2i, 3i, \dots$

Fungsi pembangkitnya adalah $(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots)$.

Contoh 3:

Tentukan fungsi pembangkit untuk masalah menentukan banyakanya cara mendistribusikan 10 bola identik ke dalam 3 lubang berbeda dengan tiap-tiap lubang berisi bola dengan jumlah genap.

Pembahasan:

Masalah ini equivalen dengan $X_1 + X_2 + X_3 = 10$, dengan $X_i = 0{,}2{,}4{,}6, \dots$.

Sehingga fungsi pembangkitnya adalah $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)^3$ dan banyaknya

distribusi 10 bola identik ke dalam tiga lubang berbeda dengan masing-masing lubang berisi bola dengan jumlah genap sama dengan mencari koefisien x^{10}.

Contoh 4: (Masalah Dadu Galileo)
Banyaknya cara mendapatkan jumlah mata dadu 10 dari pelemparan 3 dadu berbeda secara bersamaan satu kali.
Pembahasan:
Masalah ini equivalen dengan $X_1 + X_2 + X_3 = 10$, dengan $1 \leq X_i \leq 6$.

Fungsi pembangkit untuk masalah ini adalah $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$ dan banyaknya cara ketika tiga dadu berbeda dilempar bersamaan satu kali sehingga dihasilkan jumlah mata dadu 10 sama dengan koefisien dari x^{10}.

Contoh 5:
Tentukan fungsi pembangkit untuk banyaknya solusi untuk $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq r$, dengan $1 \leq X_k \leq 3$.
Pembahasan:
Ini mudah kita lihat bahwa masalah ini equivalen dengan
$X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1} = r$, dengan $1 \leq X_k \leq 3,\ 1 \leq k \leq n,\ \&\ X_{n+1} \geq 0$.

Sehingga fungsi pembangkitnya adalah $(x + x^2 + x^3)^n\ (1 + x + x^2 + \cdots)$

LATIHAN 6B

1. Tentukan fungsi pembangkit untuk persamaan bulat berikut ini:
   a. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = r,\quad X_k > k$
   b. $X_1 + X_2 + X_3 = r,\quad X_k > -k$
   c. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = r$, dengan X_1, X_2, X_3 genap non-negatif dan X_4, X_5 ganjil non-negatif.
   d. $X_1 + X_2 + X_3 < r$, dengan $k \leq X_k \leq 2k$
   e. $2X_1 + 3X_2 + 5X_3 = r,\ X_k > k$.
2. Tentukan fungsi pembangkit dari masalah-masalah berikut:
   a. Banyaknya cara mendistribusikan 15 bola identik ke dalam 10 lubang berbeda.
   b. Banyaknya cara mendistribusikan 12 bola identik ke dalam 8 lubang berbeda dengan masing-masing lubang berisi dengan jumlah bola genap.
   c. Banyaknya mendistribusikan 24 bola identik ke dalam 11 lubang berbeda dengan banyaknya bola pada lubang ke-1 dan ke-2 ganjil.

3. Tentukan fungsi pembangkit untuk banyaknya bilangan bulat antara 0 dan 99.999 yang jumlah digitnya adalah r.
4. Tentukan fungsi pembangkit untuk banyaknya cara bahwa melempar 3 dadu berbeda secara bersamaan satu kali sehingga menghasilkan jumlah paling banyak r.

Koefisien dari Fungsi Pembangkit Biasa

Setelah pada bagian sebelumnya, kita telah mendiskusikan cara menyusun fungsi pembangkit dari suatu masalah kombinatorika. Pada bagian ini, kita akan membahas masalah-masalah kombinatorika yang melibat dengan mencari koefisien suku tertentu.

Teorema-Teorema:

1. (*Binomial Theorem*) $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$

2. (*Multinomial Theorem*) $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ adalah jumlah semua suku dari bentuk $\binom{n}{r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m}$ sedemikian sehingga $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$.

3. $(1 + x + x^2 + \ \ldots\ + x^r + \ \ldots)^n =$ $\binom{n-1+0}{0} + \binom{n-1+1}{1}x + \binom{n-1+2}{2}x^2 + \cdots + \binom{n-1+r}{r}x^r + \cdots$

4. $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n \ (1 + x + x^2 + \ \ldots)$

5. $(1 - x^m)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}x^{nm}$

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$.

Contoh 1:

Tentukan koefisien dari x^{20} dalam penjabaran $(x^3 + x^4 + \cdots)^3$.

Pembahasan:

Perhatikan bahwa:

$(x^3 + x^4 + \cdots)^3 = x^9(1 + x + x^2 + \cdots)$, dengan mengunakan sifat 3 di atas, maka kita peroleh:

$x^9\left[\ \binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \binom{3-1+2}{2}x^2 + \binom{3-1+3}{3}x^3 + \ \ldots\right]$

Dan koefisien dari x^{20} adalah $\binom{3-1+11}{11}$

Contoh 2:

Tentukan koefisien dari x^9 dalam penjabaran $(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4$.

Pembahasan:

Dengan menggunakan sifat (4) di atas, maka:

$(1 + x + x^2 + \cdots + x^5)^4 = (1 - x^6)^4(1 + x + x^2 + \cdots)^4$.

Dengan menggunakan (3) & (5), kita peroleh:

$\left[\ \binom{4}{0} - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}\right]\ \left[\binom{4-1+0}{0} + \binom{4-1+1}{1}x + \cdots\right]$

Sehingga koefisien x^9 adalah

$\binom{4}{0}\binom{4-1+9}{9} - \binom{4}{1}\binom{4-1+3}{3}$.

LATIHAN 6C

Tentukan koefisien dari suku-suku yang diketahui.

1. x^{12} dalam $(x^3 + x^4 + \cdots)^3$
2. x^5 dalam $(1 + x + x^2 + \cdots)^{10}$
3. x^{24} dalam $(x^3 + x^4 + \cdots + x^{12})^4$
4. x^6 dalam $(x + x^2 + \cdots)^2\ (1 - x^3)^3$
5. x^{10} dalam $(x^3 + x^4 + \cdots)^3\ (x + x^2 + \cdots + x^5)\ (1 - x^5)^3$
6. x^{10} dalam $(x^2 + x^3 + \cdots)^3\ (x + x^2 + \cdots + x^4)\ (1 - x^3)^3$

7. x^5 dalam $\frac{(1-x^2)^{12}}{(1-x)^3}$

Aplikasi Fungsi Pembangkit Biasa dalam Pemecahan Masalah
Dalam bagian ini kita akan membahas beberapa contoh yang melibatkan konsep fungsi pembangkit dan hubungannya untuk masalah-masalah kombinatorika.

Contoh 1: (Masalah Dadu Galileo)
Berapakah peluang bahwa ketika melempar tiga dadu berbeda sehingga menghasilkan jumlah sama dengan 10.

Pembahasan:
Perhatikan bahwa: $n(S) = 6^3 = 216$.
Misalkan A: kejadian mendapatkan jumlah 10 dalam pelemparan 3 dadu berbeda.

Banyaknya cara menghasilkan jumlah 10 dalam pelemparan 3 dadu sama dengan kasus banyaknya solusi bulat dari:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 10,\ 1 \le X_i \le 6 \quad (*)$$

Dari (*), maka fungsi pembangkitnya adalah $(x + x^2 + \cdots + x^6)^3$.
$n(A)$ sama dengan koefisien dari x^{10}.

Perhatikan bahwa:

$$(x + x^2 + \cdots + x^6)^3 = x^3(1 + x + \cdots + x^5)^3 = x^3(1 - x^6)^3(1 + x + x^2 + \cdots)^3$$

$$= x^3\left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1}x^6 + \binom{3}{2}x^{12} - \binom{3}{3}x^{18}\right]\left[\binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \cdots\right]$$

Sehingga, koefisien x^7 dalam $\left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1}x^6 + \binom{3}{2}x^{12} - \binom{3}{3}x^{18}\right]\left[\binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \cdots\right]$ adalah $\binom{3}{0}\binom{3-1+7}{7} - \binom{3}{1}\binom{3-1+1}{1} = 36 - 9 = 27$

Sehingga, $n(A) = 27$

Jadi, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$.

Contoh 2:
Berapakah banyak cara mendistribusikan 7 bola identik ke dalam 3 kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat maksimal 3 bola.

Pembahasan:
Masalah ini identik dengan mencari solusi bulat dari $X_1 + X_2 + X_3 = 7$, dengan $0 \le X_i \le 3$

Sehingga fungsi pembangkitnya adalah $(1 + x + x^2 + x^3)^3$ dan banyak cara mendistribusikan 7 bola identik ke dalam 3 kotak berbeda dengan syarat pada soal sama dengan mencari koefisien x^7 dalam fungsi pembangkit di atas.

Sekarang perhatikan bahwa:

$$(1 + x + x^2 + x^3)^3 = (1 - x^4)^3(1 + x + x^2 + \cdots)^3$$

$$= \left[\binom{3}{0} - \binom{3}{1}x^4 + \binom{3}{2}x^8 - \binom{3}{3}x^{12}\right]\left[\binom{3-1+0}{0} + \binom{3-1+1}{1}x + \binom{3-1+2}{2}x^2 + \cdots\right]$$

Sehingga koefisien dari x^7 adalah $\binom{3}{0}\binom{3-1+7}{7} - \binom{3}{1}\binom{3-1+3}{3} = 6$

Jadi, banyak cara mendistribusikan 7 bola identik ke dalam 3 kotak berbeda dengan masing-masing kotak memuat maksimal 3 bola adalah 6.

LATIHAN 6D

1. Gunakan fungsi pembangkit, untuk menemukan banyaknya solusi untuk persamaan bilangan bulat berikut:
   a. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 10$, dengan $1 \leq X_i \leq 6$.
   b. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 15$, dengan $X_i \geq 0$ dan X_1 genap
   c. $X_1 + X_2 + X_3 = 6$, dengan $1 \leq X_1 \leq 5$, $X_2 \geq 2$, & $X_3 \geq 3$.
   d. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq 10$, dengan $1 \leq X_i \leq 10$.
2. (OSK, 2012) Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan probabilitas jumlah mata yang muncul 27.
3. (OSK, Tipe 1/2011) Enam dadu dilempar satu kali. Probabilitas banyaknya mata dadu yang muncul jumlahnya 9 adalah ...
4. (OSP, 2009) Tiga dadu berwarna hitam, merah, dan putih dilempar bersama-sama. Macam hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu adalah 8 sebanyak ...
5. Berapa banyak cara memilih 10 huruf dari huruf F, U, N, C, T, I , O dimana paling banyak huruf U tiga dan huruf O sedikitnya satu?

6. Berapa banyak cara mendapatkan jumlah 15 jika 7 dadu berbeda dilempar sekali bersamaan?
7. How many ways are there to collect 13 dollar bills from a class of 30 distinct children if each child gives at most 2 dollars?
8. How many ways are there to distribute 2n identical balls into four distinct cells so that no cell contains more than n balls?
9. (OSK, 2013) Suatu dadu ditos enam kali. Banyak cara memperoleh jumlah mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul mata 6 adalah ...

DAFTAR PUSTAKA

Adbul, Sakir. 2009. *Matematika 1*. Malang: UIN Malang Press

An, Kevin. 2011. *Mass Points*. OMC

Andreescu, Titu & Dorin, Andrica. Tanpa Tahun. *Number Theory (Structures, Examples, & Problems)*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu & Zuming F. 2006. *103 Trigonometry Problem from The Training of the USA IMO Team*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu, dkk. 2006. *104 Number Theory Problem from The Training of the USA IMO Team*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu, dkk. 2010.*An Introduction to Diophantine Equations*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu & Bogdan A. 2006. *Mathematical Olympiads Treasure*. Berlin: Birkhauser.

Andreescu, Titu & Dorin Andrica. 2003. *360 Problem for Mathematical Contest*. Romania: GIL Publishing House.

Andreescu, Titu & Razvan Gelca. 2009. *Mathematical Olympiads Challenges*. Berlin: Birkhauser.

Bain, Lee J & Max Engelhardt. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics (second Edition)*. California: Duxbury Press.

Binatari, Nikenasih. 2009. *Master Juara Olimpiade Matematika SMA Nasional & Internasional*. Yogyakarta: Pustaka Widyatama.

Budhi, Wono Setya. 2003. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: CV. Ricardo.

Chowdhury, KC. 2007. *A First Course in Number Theory*. New Delhi: Asian Books Private Limited.

Erickson, M. 2009. *Aha Solutions*. New York: MAA.

Faires, J. Douglas. 2007. *Langkah Pertama Menuju Olimpiade Matematika (Menggunakan Kompetisi Matematika Amerika) [Terjemahan Indonesia]*. Bandung: Pakar Raya.

Hermanto, Edy. 2010. *Diktat: Pembinaan Olimpiade Matematika Ver. 03*. Bengkulu: SMAN 5 Bengkulu.

Hermanto, Edy. 2010. *Kumpulan Soal & Solusi Olimpiade Matematika Indonesia (9 Tahun Penyelenggaraan OSN)*. Bengkulu: SMAN 5 Bengkulu.

Polya, G & Jeremy, K. 1974. *The Stanford Mathematics Problem Book with Hints & Solutions.* New York: Teachers College Press.

Protter, Murray H. 1998. *Basic Elements of Real Analysis With a 48 Illustrations*. New York: Springer.

Purwanto, Heri & dkk. 2006. *Matematika Diskrit*. Jakarta: PT Ercontara Rajawali.

Kessler, G & Lawrence Z. 2006. *NYsML-ARML Contest 1983-1988*. USA:MAA.

Manfrino, Radmila B & J A G Ortega. 2009. *Inequality: A Mathematical Olympiad Approach*. Berlin: Birkhauser.

Faires, J., Douglas & David Wells. 2008. *The Contest Problem Book VIII- AMC 10-(2000-2007).* Amerika: MAA

Faires, J., Douglas & David Wells. 2008. *The Contest Problem Book IX- AMC 12-(2001-2007).* Amerika: MAA

Salkind, CT. 1980. *The Contest Problem Book I: AHSME 1950-1960*. New York: MAA.

Salkind, CT. 1965. *The Contest Problem Book II: AHSME 1961-1965*. New York: MAA.

Salkind, CT & James, ME. 1973. *The Contest Problem Book III: AHSME 1966-1972*. New York: MAA.

Shell, Niel, dkk. 1982. *The contest Problem Book IV: AHSME 1973-1982*. New York: MAA.

Silverman, Richard A. 1989. *Essential Calculus with Applications*. New York: Dover Publications INC.

Sudjana. 1975. *Metode Statistika.* Bandung: Tarsito.

Tim Pembina Olimpiade Matematika. 2009. *Materi Pengantar OSN Bidang Matematika SMA*. Jakarta: Depdiknas.

Jiagu, Xu. 2010. *Mathematical Olympiad Series-Vol 6: Lecture Notes on Mathematical Olympiad Course For Junior Section (Vol. 1)*. Singapore: World Scientific Publishing.

Jiagu, Xu. 2010. *Mathematical Olympiad Series-Vol 6: Lecture Notes on Mathematical Olympiad Course For Junior Section (Vol. 2)*. Singapore: World Scientific Publishing.

Lipschutz, S & Marc L. 2007. *Scaum's: Theory and Problem of Discrete Mathematics Third Edition*. New York: McGraw-Hill.

Muhsetyo, Gatot. 2010. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Noormandiri, BK. 2007. *Matematika untuk SMA Kelas X*. Jakarta: Erlangga.

Noormandiri, BK. 2007. *Matematika untuk SMA Kelas XI IPA*. Jakarta: Erlangga.

Nuharini, D dan Tri Wahyuni. 2008. *Matematika: Konsep dan Aplikasinya untuk SMP/MTs Kelas VII*. Jakarta: DEPDIKNAS.

Purcell, Edwin J, dkk. 1984. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 (edisi ke-4)*. Jakarta: Erlangga.

Reiler, HB. 2006. *The Contest Problem Book 7, AMC 1995 – 2000*. New York: MAA.

Rike, Tom. 2000. *Mass Points Geometry (Barycentric Coordinates).* Berkeley Math Circle.

Rosen, Kenneth H. 2007. *Discrete Mathematics an Its Applications (sixth Edition)*. Singapore: McGraw-Hill.

Ruderman, HD. 2007. *NYSML-ARML Contest 1973-1985*. Oklahoma: Mu alpha Theta.

Santos, David A. 2005. *Number Theory for Mathematical Contests*. Johns Hopkins University.

Saul, ME, dkk. 1986. *The New York City Contest Problem Book: 1975-1984*. USA: Dale Seymour Publication.

Sembiring, S. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.

Townsend, Michael. Tanpa Tahun. *Discrite Mathematics Applied Combinatorics and Graph Theory*. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company.

Wagiyo, A, dkk. 2008. *Pegangan Belajar Matematika 1 untuk SMP/MTs Kelas VII.* Jakarta: PT Galaksi Puspa Mega (DEPDIKNAS).

Wintarti, Atik, dkk. 2008. *Contectual Teaching and Learning: Matematika SMP/MTs Kelas VII Edisi 4*. Jakarta: DEPDIKNAS.

Wirodikromo, S. 1995. *Matematika untuk SMU Kelas 1 Catur Wulan 1*. Jakarta: Erlangga.

Zawaira, Alexander & Gavin H. 2009. *A Primer for Mathematics Competitions*. New York: Oxford University Press Inc.

------------. Tanpa Tahun. *Mathematics, Textbook for Class XI*.